Fisica Statistica. – A.A. 2013-2014 e precedenti, 20 Dicembre 2013

Secondo compitino

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Fluttuazioni nel grancanonico per Fermioni non interagenti, liberi e polarizzati di spin (spinless) in 2 dimensioni*

Nel seguito, ove rilevante si considerino condizioni al contorno periodiche.

1. L'energia media nel gran canonico si può esprimere, per un generico sistema quantistico, come

$$E(z,\beta,V) = \langle \hat{H} \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Tr(e^{-\beta\hat{H}}\hat{H}) \Big/ \sum_{N=0}^{\infty} z^N Tr(e^{-\beta\hat{H}}) \, ,$$

ove $Tr(\hat{A})$ è la traccia dell'operatore a N particelle denotato con $\hat{A}$. Si ottenga $\langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2$, in termini di una derivata termodinamica di $E(z,\beta,V)$ rispetto ad uno dei suoi parametri.

2. Utilizzando l'espressione trovata al punto precedente si calcoli $(\langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2) \big/ \langle \hat{H} \rangle^2$, esplicitamente in termini di V, z, λ, ove λ è la lunghezza d'onda termica e si assume $0 < z < 1$.

3. In maniera analoga a quanto fatto al punto 1, partendo da

$$\mathcal{N}(z,\beta,V) = \langle \hat{N} \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} N z^N Tr(e^{-\beta\hat{H}}) \Big/ \sum_{N=0}^{\infty} z^N Tr(e^{-\beta\hat{H}}) \, ,$$

si esprima $\langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2$ in termini di una derivata termodinamica di $\mathcal{N}(z,\beta,V)$ rispetto ad uno dei suoi parametri.

4. Utilizzando l'espressione trovata al punto precedente si calcoli $(\langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2) \big/ \langle \hat{N} \rangle^2$, esplicitamente in termini di V, z, λ, ove λ è la lunghezza d'onda termica e si assume $0 < z < 1$.

Esercizio 2: *Bosoni non interagenti e liberi in 2 dimensioni e con dispersione lineare dell'energia*

Si considerino dei Bosoni con livelli dell'energia di singola particella $\epsilon(\mathbf{p}) = \alpha p$ e condizioni al contorno periodiche.

1. Si calcoli esplicitamente la densità di stati in energia, per unità d'area:

$$g(E) = \frac{1}{A} \sum_{\mathbf{p}} \delta(E - \epsilon(\mathbf{p}))$$

2. Si calcoli la densità media $\rho = \langle N \rangle / A$ in termini della fugacità z e della lunghezza d'onda termica $l = \sqrt{2\pi\hbar^2\alpha^2/(K_B T)^2}$.

3. Utilizzando il risultato del punto precedente, si discuta il problema dell'eventuale condensazione.

4. Se al punto precedente si è trovato che c'è condensazione si ricavi l'andamento della frazione di condensato in funzione della densità, a fissatà temperatura e densità superiore a quella critica; altrimenti si ricavi l'equazione di stato (ovvero la funzione di gran partizione) esprimendo βP in temini di z e λ.