Fisica Statistica. – A.A. 2018-2019, 9 novembre 2018

Primo compito
(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1: *Particelle con momento di dipolo elettrico in 2D.*

Si considerino N particelle non interagenti in un mondo bidimensionale. Le particelle si muovono liberamente sul piano di area S (moto traslazionale). Ciascuna particella è dotata di un momento di dipolo $\mathbf{d}$ e soggetta ad un campo elettrico $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Se poniamo il campo orientato nella direzione delle x crescenti, il momento di dipolo può orientarsi ad un angolo $0 \leq \phi \leq 2\pi$ rispetto al campo. Si faccia attenzione. L'angolo ϕ (orientazione del dipolo rispetto al campo) non ha niente a che vedere con le coordinate che danno la posizione della particella sul piano (moto traslazionale).

1. Si scriva l'hamiltoniana del sistema e operando nell'ensemble canonico si calcoli l'energia libera di Helmoltz $A(N, S, T, \mathcal{E})$.

   [**5 punti**]

2. Si calcoli l'energia $E(N, S, T, \mathcal{E})$.

   [**3 punti**]

3. Si calcoli la densita areale di polarizzazione del sistema

$$P = -\frac{1}{S}\frac{\partial A}{\partial \mathcal{E}}.$$

   [**3 punti**]

4. Si calcoli la suscettività elettrica, definita da

$$\left.\frac{\partial P}{\partial \mathcal{E}}\right|_{\mathcal{E}=0}.$$

   Si utilizzi la definizione data a pie' pagina per calcolare lo sviluppo in serie di $I_0(z)$ per z piccolo, al primo ordine non nullo in z e da questo quello della $I_1(z)$.

   [**4 punti**]

NOTA: Porremo $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} exp[z\cos(\phi)]d\phi = I_0(z)$ e $I_0'(z) = I_1(z)$.

Esercizio 2: *Particelle in 1 dimensione*

Si considerino N particelle non interagenti in 1 dimensione in presenza di una energia potenziale logaritmica:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2m} p_i^2 + U_0 \log (x_i/a) \right] .$$

Il moto è confinato nella regione $a \le x \le L$, ove $a > 0$ è una lunghezza finita ed N, L possono tendere ad infinito per prendere il limite termodinamico. In tutta generalità nel seguito consideremo sempre $L \gg a$ e si tratterà il sistema nell'ensemble canonico.

1. Si calcoli l'energia libera di Helmoltz $A(N, L, T)$.

   [**4 punti**]

2. Si calcoli la posizione media $\langle x \rangle$ delle particella. Vista l'identità delle particelle possiamo calcolare $\langle x_1 \rangle$.

   [**3 punti**]

3. Si ottengano espressioni per $\langle x_1 \rangle$, per (i) $\beta U_0 \gg 1$ e (ii) $\beta U_0 \ll 1$.

   [**4 punti**]

4. Si calcoli la pressione

   $$P = -\frac{\partial A}{\partial L}$$

   e si forniscano espressioni limite per (i) $\beta U_0 \gg 1$ e (ii) $\beta U_0 \ll 1$.

   [**4 punti**]