Fisica Statistica. – A.A. 20122-2023, 12 dicembre 2022

Secondo Compitino

(*tempo 3 ore*)

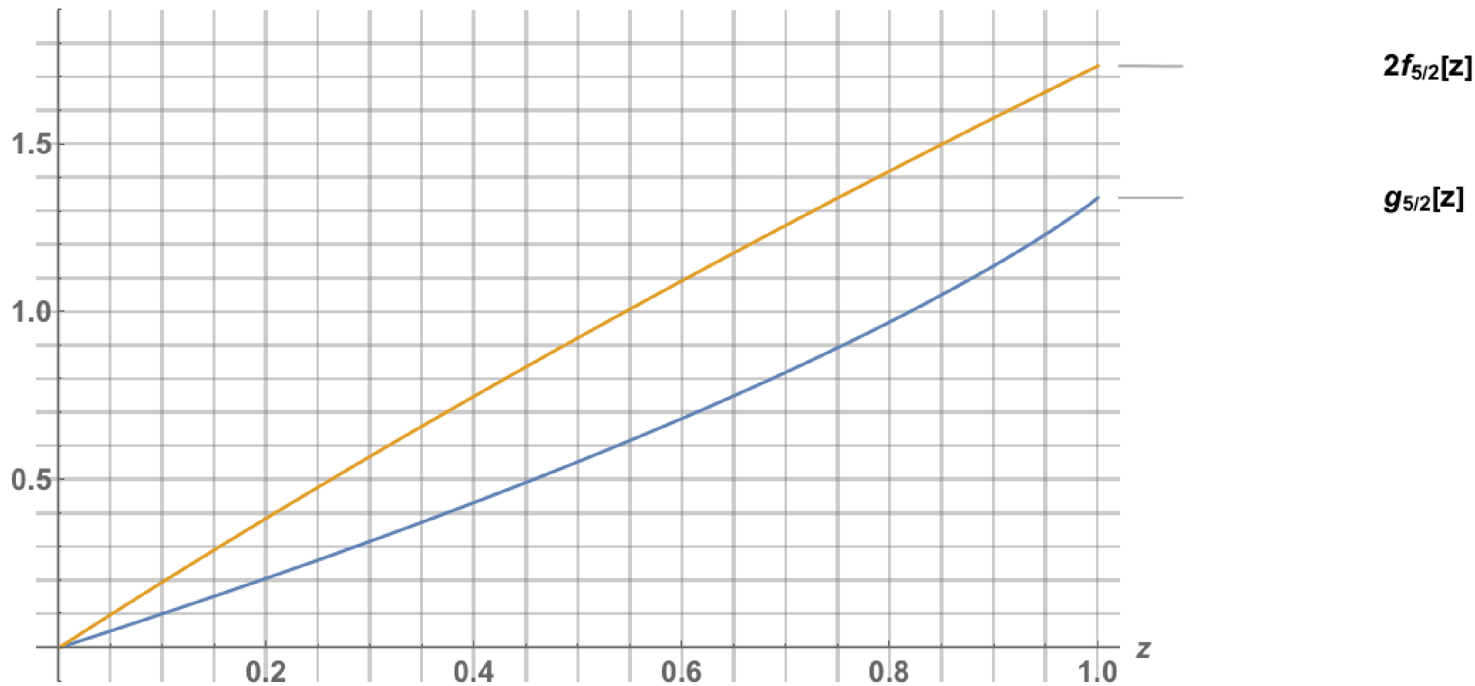
Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

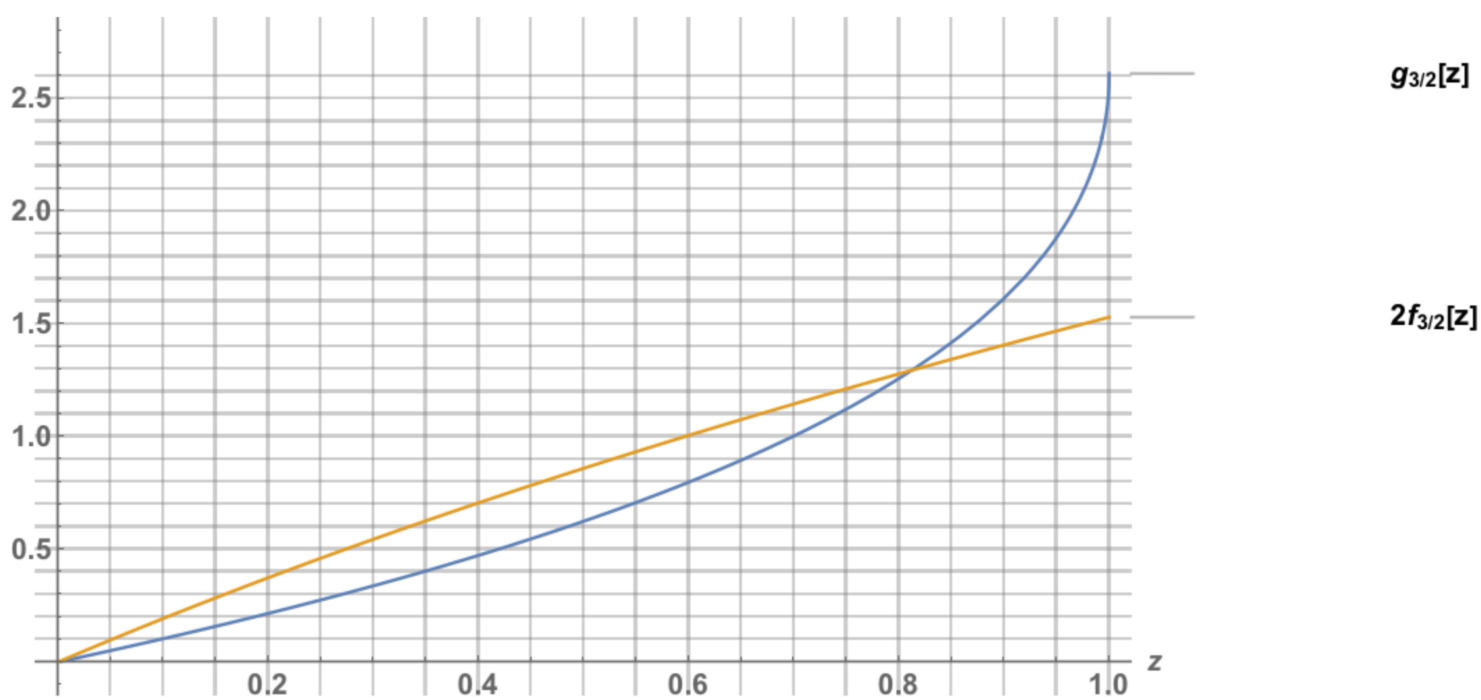
Esercizio 1 *Gas di Fermi e di Bose in equilibrio*

Si consideri un cuboide con spigoli (L_x, L_y, L_z). Un setto separa la regione $0 \leq x \leq l$, con volume $V_1 = l \cdot L_y \cdot L_z \equiv l \cdot A$, dalla regione $l \leq x \leq L_x$, con volume $V_2 = (L_x - l) \cdot A$. Il setto è mobile e permeabile al calore ma non permette il passaggio delle particelle da un lato all'altro. La regione 1 è occupata da Bosoni di spin $S = 0$ e massa m e la regione 2 da Fermioni di spin $S = 1/2$ e massa m. Il sistema è tenuto a temperatura T.

1. Si diano le espressioni di $\beta P = (1/V)\log(Z(V, T, z))$ per Fermioni e Bosoni, in termini di funzioni esplicite di T e z, ottenute da sviluppi in serie, assumendo che $z < 1$ sia per Fermioni che Bosoni. Se non le si ricorda bisognerà calcolarle.
2. Si ricavino quindi le espressioni della densità in ciascuno dei 2 sottosistemi.
3. Si imponga l'equilibrio meccanico tra le due sottoregioni. Aiutandosi con le figure allegate si determini il valore della fugacità z_F dei Fermioni, quando quella dei Bosoni z_B è prossima a 1. Si dia il valore ottenuto per z_F con un il numero di cifre che si ritengono significative.
4. Si ricavi il valore numerico di $\rho\lambda_T^3$ all'equilibrio per Fermioni e Bosoni, riportando solo le cifre significative, e da queste, assumendo che il numero medio dei Bosoni sia uguale a quello dei Fermioni, si ricavi il valore di l/L_x.



1.5
1.0
0.5
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
z
2f5/2[z]
g5/2[z]



2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
z
g3/2[z]
2f3/2[z]

Esercizio 2 *Gas di Fermioni in dimensione D con dispersione dell'energia a potenza.*

Si considerino N Fermioni di spin $S = 1/2$ in dimensione D, in un contenitore ipercubico con spigolo L e condizioni al contorno periodico, con livelli d'energia $\epsilon(S_z, \mathbf{p}) = \epsilon_F \cdot (p/p_F)^\gamma$ e $\gamma > 0$, $p_F > 0$, $\epsilon_F > 0$.

1. Si calcoli la densità di stati di singola particella

$$g(E) = \frac{1}{V_D} \sum_{\mathbf{p}} \delta(E - \epsilon(S_z, \mathbf{p}))$$

per il sistema in esame.

2. Utilizzando la densità di stati $g(E)$ si calcoli esplicitamente $\beta P = (1/V_D) \log(Z(V, T, z))$ quando $z < 1$.

3. Si calcoli quindi esplicitamente la densità $\rho = \langle N \rangle / V_D$ come funzione di T e z.

4. Si calcoli l'energia E e quindi il rapporto $P/(E/V)$.

NOTA:

1. In coordinate sferiche in dimensione D l'integrale su tutto lo spazio dell'impulso è: $\int d\mathbf{p} = \int d\Omega_D \int dp\, p^{D-1}$ e evidentemente $\int d\Omega_D = \Omega_D$, ove $\Omega_D > 0$ è l'angolo solido in dimensione D, $\Omega_D = D\pi^{D/2}/\Gamma(D/2 + 1)$

2. Per $|x| < 1$, $\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n / n$.

3. Si ricorda la definizione $\Gamma(z) = \int_0^\infty dt\, t^{z-1} e^{-t}$ e si assume che si conoscano valori notevoli di tale funzione.