Fisica Statistica. – A.A. 20122-2023, 11 novembre 2022

Primo Compitino

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Particelle in un potenziale oscillante in 1 dimensione*

Si considerino N particelle indistinguibili in 1 dimensione che si muovono sul segmento $[0, L]$. Il segmento L è composto di 2M sottosegmenti di lunghezza l. Le particell sono soggette ad un potenziale $v(x)$. Se si indicano i sottosegmenti con l'indice $i_x = 1, 2, \ldots, 2M$ $v(x) = -\epsilon$ nei sottosegmenti dispari e $v(x) = \epsilon$ in quelli pari.

1. Si calcoli la funzione di partizione canonica del sistema di N particelle e da questa l'energia libera di Helmolts F. Si denoti con $\rho = N/L$ la densità.
2. Si calcoli l'energia media ed utilizzando questo risultato si ottenga l'entropia.
3. Si calcoli il potenziale chimico.
4. Si calcoli la densità $\rho(x) = \langle \sum_{i=1}^{N} \delta(x - x_i) \rangle$ e se ne faccio un grafico.

Esercizio 2 *Particelle in campo esterno sulla superficie di una sfera*

Si considerino N particelle costrette a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R e soggette ad un potenziale esterno. In coordinate sferiche l'hamiltoniana della i-esima particella è

$$h(p_{\theta_i}, p_{\phi_i}, \phi_i, \theta_i) = \frac{p_{\theta_i}^2}{2mR^2} + \frac{p_{\phi_i}^2}{2mR^2 \sin\theta_i{}^2} + v_0 \cos\theta_i,$$

con ϕ_i, θ_i (angolo azimutale e angolo polare) le coordinate canoniche e p_{θ_i}, p_{ϕ_i} i momenti coniugati.

Si noti altresì che $p_{\theta_i} = mR^2\dot{\theta}_i$ e $p_{\phi_i} = mR^2 \sin\theta_i{}^2 \dot{\phi}_i$, così che $[p_{\theta_i}] = [p_{\phi_i}] = [h]$, con h una azione, ad esempio la costante di Plank.

Evidentemente lo spazio delle fasi di ciascuna particella è dato da $-\infty \leq p_{\theta_i}, p_{\phi_i} \leq \infty$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $0 \leq \phi_i \leq 2\pi$.

Si faccia attenzione al fatto che l'hamiltoniana di singola particella non è *separabile* in energia cinetica ed energia potenziale in quanto entrambe dipendono dall'angolo polare!

1. Si calcoli la funzione di partizione canonica del sistema di N particelle e da questa l'energia libera di Helmolts F. Si denotino con $\rho = N/A$ la densità areale, ove $A = 4\pi R^2$ è la superficie della sfera.

2. Si calcoli l'energia media.

3. Si calcoli l'entropia.

4. Si calcoli la densità superficiale definità da

$$\rho_A(\theta, \phi) = N\langle \frac{\delta(\theta - \theta_1)\delta(\phi - \phi_1)}{R^2 \sin\theta} \rangle$$

e se ne faccia un grafico qualitativo in funzione di θ.