

Fisica Statistica. – A.A. 2011-2012, 13 febbraio 2012

Secondo appello - prima sessione

(tempo 3 ore)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- **Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione.** Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Particelle in un potenziale esterno*

Si considerino N particelle classiche di massa m , non interagenti, che si muovano all'interno di un contenitore sferico di raggio R , centrato all'origine, sotto l'azione di un potenziale esterno. La particella in posizione \mathbf{r} , $0 \leq r \leq R$, ha energia potenziale $U(r) = U \log[(r/R)^\alpha]$.

1. Si calcoli la funzione di partizione canonica di questo sistema quando $\beta U \alpha < 3$ e da questa si ricavi l'energia libera di Helmholtz A .
2. Si calcoli l'energia interna.
3. Si calcoli l'entropia.
4. Si calcoli il profilo di densità $\rho(r) = N \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \rangle$ e si disegni $\rho(r)/\rho(R)$ quando $\beta U \alpha = -1$ e quando $\beta U \alpha = 1$.

Esercizio 2 *Fluttuazioni di energia nell'insieme Gran Canonico per un gas di Bosoni*

Si consideri l'espressione della funzione di Gran Partizione per un sistema quantistico:

$$\mathcal{Z}(z, V, \beta) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V, \beta) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{\alpha} e^{-\beta E_{\alpha}(V, N)},$$

con $E_{\alpha}(V, N)$ l'energia dello stato individuato dall'etichetta α (per un sistema di N particelle in un volume V).

1. A partire dall'espressione della funzione di Gran Partizione si ricavi un'espressione per l'energia media in termini della derivata parziale del logaritmo di $\mathcal{Z}(z, V, \beta)$ rispetto a β .
2. Si ricavi, quindi, un'espressione per le fluttuazioni d'energia come derivata parziale seconda del logaritmo di $\mathcal{Z}(z, V, \beta)$.
3. Utilizzando la relazione ottenuta al punto 1) si derivi l'espressione dell'energia media di un gas di Bosoni libero e non interagente, per il quale viene assunta nota la funzione di Gran Partizione in termini di z, λ, V .
4. Si utilizzando anche la relazioni trovate al punto 2) si calcolino le fluttuazioni relative (RMS) dell'energia del menzionato gas di Bosoni.