Fisica Statistica. – A.A. 2011-2012, 24 gennaio 2012

Secondo appello - terza sessione

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- **Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione**. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Particelle non interagenti in campo gravitazionale e magnetico*

Si considerino N particelle classiche con carica q e massa m, libere di muoversi in un contenitore di volume V, con base di area A_b ed altezza L_z; le particelle sono sotto l'azione del potenziale gravitazionale $v(\mathbf{r}) = mgz$ e di un campo magnetico costante, di intensità B e diretto lungo z. Nel seguito si trascura l'interazione tra le particelle.
L'hamiltoniana di singola particella, in accoppiamento minimale, è

$$\begin{aligned} h(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 + v(\mathbf{r}), \\ A_y(\mathbf{r}) &= Bx, \\ A_x &= A_z = 0. \end{aligned}$$

1. Si calcoli la funzione di partizione canonica di questo sistema e da questa si ricavi l'energia libera di Helmoltz A.
2. Si calcoli il potenziale chimico.
3. Si calcoli l'energia media.
4. Si calcoli la magnetizzazione media definita da

$$M = -\left.\frac{\partial A}{\partial B}\right|_{T,V,N}.$$

Esercizio 2 *Equilibrio tra Fermioni di spin diverso*

Si considerino dei Fermioni in 2 dimensioni, non interagenti, a T=0, con condizioni al contorno periodiche (PBC) e con spin s.

1. Supponendo di avere N Fermioni su un'area quadrata A ($A = L^2$) e che per ogni valore dell'impulso $\mathbf{p}$ tutte le (2s+1) proiezioni di spin lungo z siano occupate, si calcoli l'impulso di Fermi p_F, ovvero il modulo dell'impulso dello stato (di particella singola) occupato più alto in energia. (Si ricorda che $s_z = -s, -s+1, ..., s-1, s$)

2. Si sommi l'energia di tutti gli stati occupati, ovvero con impulso $p < p_F$ e proiezioni di spin qualsiasi, per ottenere l'energia totale $E(A)$.

3. Si calcoli la pressione di un tale sistema a $T = 0$, usando $P = -\partial E/\partial A$ (l'energia libera di Helmoltz coincide con l'energia a $T = 0$).

4. Si consideri ora un pistone con un setto mobile che separa N_1 Fermioni con spin 1/2 da N_2 Fermioni con spin 3/2. Evidentemente all'quilibrio la pressione esercitata dai due gas sul setto mobile deve essere uguale: quale è il rapporto delle due densità all'quilibrio?