

Fisica Statistica. – A.A. 2009-2010, 22 Dicembre 2010

Primo scritto - terzo appello

(tempo 3 ore)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Particelle in un potenziale esterno*

Si considerino N particelle classiche non interagenti che si muovano all'interno di un contenitore sferico di raggio R , centrato all'origine, sotto l'azione di un potenziale esterno. La particella in posizione \mathbf{r} , $r \leq R$, ha energia potenziale $U(r) = U \log[(\sqrt{4\pi}r/R)^\alpha]$.

1. Si calcoli la funzione di partizione canonica di questo sistema quando $\beta U \alpha = 2$ e da questa si ricavi l'energia libera di Helmholtz A .
2. Si calcoli la pressione considerando la variazione del volume del contenitore.
3. Si calcoli il potenziale chimico μ .
4. Si calcoli il profilo di densità $\rho(r) = N \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \rangle$. Si provi ad esprimere pressione e potenziale chimico utilizzando $\rho(r)$: in μ e P appaiono le densità valutate a quali valori di r ?

Esercizio 2 *Fononi alla Debye in un cristallo bidimensionale*

Si considerino le piccole oscillazioni degli N atomi in un cristallo bidimensionale di area A ; esse possono essere descritte in termini di $2N$ oscillatori armonici indipendenti con frequenze $\omega_{\mathbf{k},s} = ck$, $s = 1, 2$ e $k < k_D$. Assumeremo che le energie degli oscillatori siano date da $\hbar\omega_{\mathbf{k},s} n_{\mathbf{k},s}$, con $n_{\mathbf{k},s} = 0, 1, 2, \dots$, ovvero che si possa trascurare il moto di punto zero.

1. Si calcoli la funzione di partizione.
2. Si calcoli l'energia (a partire dal risultato del punto precedente) e la si manipoli in modo da esprimerla (per $T \rightarrow 0$) in termini di

$$\int_0^\infty dt \frac{t^2}{e^t - 1} \equiv \zeta(3) = 1.202.$$

3. Si calcoli il calore specifico a volume (area in questo caso) costante per $T \rightarrow 0$.
4. Sapendo che la densità areale di atomi è n , si calcoli il vettore di Debye; il vettore di Debye è definito in modo che l'area πk_D^2 contenga N valori di \mathbf{k} (in PBC). Si valuti k_D numericamente quando $n = 10^9 \text{cm}^{-2}$.