Fisica Statistica. – A.A. 2021-2022, 21 dicembre 2021

I Compitino

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1: *Fermioni di spin 1/2 in regime relativistico in 2 dimensioni*

Si considerino N fermioni di spin 1/2 in regime relativistico, liberi e non interagenti su un'area quadrata A, con condizioni periodiche al contorno. L'hamiltoniana di singola particella è scelta come

$$\hat{H}_1 = \sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 c^2 + (m_0 c^2)^2} - m_0 c^2,$$

con autovalori $\epsilon(\mathbf{p}, S_z) = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2} - m_0 c^2$, che per piccoli valori dell'impulso danno il corretto limite non relativistico $p^2/(2m_0)$. m_0 è la massa a riposo del fermione.

1. Si ottenga l'espressioni dell'impulso di Fermi in termini di $\rho = N/A$.
2. Si calcoli l'energia dello stato fondamentale del sistema di N Fermioni
$$E(p_F) = \sum_{S_z, |\mathbf{p}| < p_F} \epsilon(\mathbf{p}, S_z).$$
3. Si ottengano le espressioni limite di $E(p_F)$ nei casi (i) $(p_F c/m_0 c^2)^2 \ll 1$ e (ii) $(m_0 c^2/p_F c)^2 \ll 1$ con sviluppi in potenze della quantità piccola, fino all'ordine necessario ad avere risultati non nulli!
4. Si calcolino le pressioni corrispondenti alle energie trovate al punto precedente ed in ciacuno dei casi (i) e (ii) si dia il rapporto $P/(E/A)$ tra pressione e densità d'energia.

Esercizio 2: *Bosoni di spin S=0 con asimmetria di massa in 2 dimensioni*

Consideriamo degli ipotetici Bosoni che si muovono in 2 dimensioni e hanno inerzie diverse lungo le due direzioni degli assi cartesiani x ed y. Le energie di singola particella per tali bosoni sono

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \frac{{p_x}^2}{2m_x} + \frac{{p_y}^2}{2m_y}. \tag{1}$$

1. Si calcoli la densità di stati in energia per unita d'area

$$g(E) = \frac{1}{A}\sum_{\mathbf{p}} \delta(E - \epsilon(\mathbf{p})).$$

   Per il calcolo dell'integrale che dà $g(E)$ si suggerisce prima di tutto un cambio di variabili $p_\alpha = \sqrt{2m_\alpha}\, t_\alpha$, $\alpha = x, y$.

2. Si ottenga $\log Z(z, A, T)/A = \beta P(z, T)$.

3. Dal risultato precedente si ottenga $E(z, A, T)$.

4. Dai risultati precedenti si ottengano $F(z, A, T)$ (energia libera di Helmoltz) ed infine $S(z, A, T)$.

NOTA: Nella versione distribuita in classe l'energia libera di Helmoltz era indicata con A, lettera utilizzata anche per l'area del sistema. Qui viene usata F.