Fisica Statistica. – A.A. 2014-2015, 19 Dicembre 2014

Primo compitino

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Gas ideale di Fermioni di spin 3/2 in 4 dimensioni*

Si consideri dei fermioni di spin 3/2, liberi e non interagenti in 4 dimensioni e si usino condizioni al contorno periodiche (Born-von Karman).

1. Si calcoli esplicitamente la densità di stati in energia, per unità di volume, sapendo che l'angolo solido in 4 dimensioni vale $\Omega = 2\pi^2$:
$$g(E) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, S_z} \delta(E - \frac{p^2}{2m})$$
.
2. Si calcoli la densità media $\rho = \langle N \rangle / V$ in termini della fugacità z e della lunghezza d'onda termica λ.
Si ricorda che $\lambda^2 = h^2/(2\pi m \ K_B T)$ e che $[1 + ze^{-t}]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n e^{-nt}$.
3. Si calcoli l'equazione di stato (ovvero la funzione di gran partizione) esprimendo βP in temini di z e λ .
Si usi il fatto che $log[1 + ze^{-t}] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n e^{-nt}/n$.
4. Utilizzando il risultato dei punti precedenti si consideri il limite classico, ovvero piccoli valori di $\lambda^4 \rho$, per ottenere la prime due correzioni quantistiche non nulla all'equazione di stato, calcolata al punto precedente.

Esercizio 2: *Bosoni non interagenti e liberi in 3 dimensioni e con dispersione lineare dell'energia*

Si considerino dei Bosoni con livelli dell'energia di singola particella $\epsilon(\mathbf{p}) = \alpha p$ e condizioni al contorno periodiche.

1. Si calcoli la densità media $\rho = \langle N \rangle / V$ in termini della fugacità z e della lunghezza d'onda termica l, $1/l^3 = 4\pi(K_B T/\alpha h)^3$.

   Si usi $[1 - ze^{-t}]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-nt}$

2. Si calcoli l'equazione di stato (ovvero la funzione di gran partizione) esprimendo βP in temini di z e l.

   Si usi il fatto che $-log[1 - ze^{-t}] = \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-nt}/n$.

3. Utilizzando il risultato del punto 1, si discuta il problema dell'eventuale condensazione.

4. Se al punto precedente si è trovato che c'è condensazione si ricavi l'andamento della frazione di condensato ρ_0/ρ nei casi seguenti: (i) a data temperatura T ed in funzione di ρ con $\rho > \rho_c(T)$ e (ii) a data densità ρ ed in funzione di T con $T < T_c(\rho)$.