ESERCIZIO 1

1

$$\mu < \min_{\bar{p},n} \epsilon(\bar{p},n) = \min_{\bar{p},n}\left(\frac{\bar{p}^2}{2m}+n\Delta\right) = 0$$

$$z = e^{\beta\mu} < e^0 = 1$$

$$\boxed{z<1}$$

2

$$\ln \mathcal{Z}(z,V,T,\Delta) = -\sum_{\bar{p}n} \ln\left(1-ze^{-\beta\epsilon(\bar{p},n)}\right)$$

$$= -\sum_{p}\left\{\ln\left(1-ze^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right)+\ln\left(1-ze^{-\beta\Delta}e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}\right)\right\}$$

Ricordiamo che

$$-\sum_{\bar{p}} \ln\left(1-ze^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right) = -\ln(1-z)+\frac{V}{\lambda_T^3}g_{5/2}(z);$$

da cui

$$-\sum_{\bar{p}} \ln\left(1-ze^{-\beta\Delta}e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right) = -\sum_{\bar{p}}\ln\left(1-\tilde{z}e^{-\beta p^2/2m}\right)$$

con $\tilde{z} = ze^{-\beta\Delta}$ e quindi

$$-\sum_{\bar{p}} \ln\left(1-ze^{-\beta\Delta}e^{-\beta p^2/2m}\right) = -\ln(1-ze^{-\beta\Delta})+\frac{V}{\lambda_T^3}g_{5/2}(ze^{-\beta\Delta})$$

Infine

$$\frac{1}{V}\ln\mathcal{Z}(z,V,T,\Delta) = -\frac{\ln(1-z)}{V}-\frac{\ln(1-ze^{-\beta\Delta})}{V}+\frac{V}{\lambda_T^3}\left[g_{5/2}(z)+g_{5/2}(ze^{-\beta\Delta})\right]$$

(3) $$\rho = \frac{\langle N \rangle}{V} = z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\ln Z(z,V,\pi,\Delta)}{V} \Bigg|_{V,\pi,\Delta}$$

$$\rho = \frac{1}{V}\left[\frac{z}{1-z} + \frac{z e^{-\beta\Delta}}{1-z e^{-\beta\Delta}}\right] + \frac{1}{\lambda_\pi^3}\left[g_{3/2}(z) + g_{3/2}(z e^{-\beta\Delta})\right]$$

avendo usato

$$z \frac{\partial g_\alpha(z)}{\partial z} = g_{\alpha-1}(z) \quad ; \quad g_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$$

$$z \frac{\partial}{\partial z} g_\alpha(z e^{-\beta\Delta}) = \tilde{z} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} g_\alpha(\tilde{z}) = g_{\alpha-1}(\tilde{z}) \qquad \boxed{\tilde{z} = z e^{-\beta\Delta}}$$

(4)

$$\rho = \rho_0 + \rho_n$$

$$\rho_0 = \lim_{V\to\infty}\left[\frac{1}{V}\frac{z}{1-z} + \frac{1}{V}\frac{z e^{-\beta\Delta}}{1-z e^{-\beta\Delta}}\right]$$

E' evidente che $\rho_0 = 0$ se z rimane minore di 1 quando $V\to\infty$ e quindi per $z<1$

$$\rho = \rho_n = \frac{1}{\lambda_\pi^3}\left[g_{3/2}(z) + g_{3/2}(z e^{-\beta\Delta})\right] \equiv X(z,\pi,\Delta)$$

Essendo $g_{3/2}(z)$ una funzione crescente di z, a fissati π e Δ, $X(z,\pi,\Delta)$ è massima a $z=1$

Le quantità critiche sono determinate dalla condizione

$$(\rho\lambda_T^3)_c = g_{3/2}(1) + g_{3/2}(e^{-\beta\Delta})$$

Se $\rho\lambda_T^3 > (\rho\lambda_T^3)_c$ allora è necessario ipotizzare che $\rho_0 > 0$. $\rho\lambda_T^3 > (\rho\lambda_T^3)_c$ significa, ricordando che $\lambda_T^3 = c\, T^{-3/2}$,

$$\rho c T^{-3/2} > g_{3/2}(1) + g_{3/2}(e^{-\beta\Delta})$$

ovvero

$$T < \left[\frac{\rho c}{g_{3/2}(1) + g_{3/2}(e^{-\beta\Delta})}\right]^{2/3} \equiv T_c(\rho, T, \Delta) \quad (*)$$

Nel caso $\epsilon(\bar{p}) = p^2/2m$ (eq. (2)), abbiamo

$$T < T_c^*(\rho) = \left(\frac{\rho c}{g_{3/2}(1)}\right)^{2/3}$$

Essendo $g_{3/2}(e^{-\beta\Delta}) > 0$ per $\beta\Delta < \infty$ è chiaro che

$$T_c < T_c^*$$

anche se la determinazione di T_c richiede la soluzione di una equazione implicita (*),

$$T_c = \left[\frac{\rho c}{g_{3/2}(1) + g_{3/2}(e^{-\Delta/k_B T_c})}\right]^{2/3}$$

ESERCIZIO 2

1. $$p_\alpha = \frac{h}{L} n_\alpha \quad , n_\alpha \in \mathbb{Z} \, , \quad \alpha = x, y \qquad \boxed{P.B.C.}$$

2. $$\frac{p_x^2}{2m_1} + \frac{p_y^2}{2m_2} = \mathcal{E} \quad , \text{ un'ellisse}$$

3. Come suggerito, occupiamo gli stati di singola particella con

$$\epsilon(\bar{p}) = \frac{p_x^2}{2m_1} + \frac{p_y^2}{2m_2} \leq \mathcal{E} \, .$$

Contiamoli

$$\mathcal{N}(\mathcal{E}) = \sum_{S_z=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\bar{p} \\ \epsilon(\bar{p}) \leq \mathcal{E}}} = 2 \int \frac{d\bar{p}}{\left(\frac{h}{L}\right)^2} \vartheta(\mathcal{E} - \epsilon_{\bar{p}})$$

$$\mathcal{N}(\mathcal{E}) = \frac{2A}{h^2} \int\int_{\frac{p_x^2}{2m_1} + \frac{p_y^2}{2m_2} \leq \mathcal{E}} dp_x \, dp_y$$

Introduciamo le nuove variabili

$$\tilde{p}_x = \frac{p_x}{\sqrt{2m_1}} \quad , \quad \tilde{p}_y = \frac{p_y}{\sqrt{2m_2}}$$

ottenendo $\quad dp_\alpha = \sqrt{2m_\alpha} \, d\tilde{p}_\alpha \quad$ e quindi

$$\mathcal{N}(\mathcal{E}) = \frac{2A}{h^2} \sqrt{2m_1} \sqrt{2m_2} \int\int_{\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2 \leq \mathcal{E}} d\tilde{p}_x \, d\tilde{p}_y$$

Dobbiamo calcolare l'area di una circonferenza di raggio $\sqrt{\mathcal{E}}$.
Otteniamo

$$\mathcal{N}(\mathcal{E}) = 4\frac{A}{h^2}\sqrt{m_1 m_2}\ \pi\,\mathcal{E}$$

E' evidente che $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ è una funzione crescente di $\mathcal{E}$. La definizione di energia di Fermi ϵ_F è

$$\mathcal{N}(\epsilon_F) = N,$$

che mi fornisce

$$4\frac{A}{h^2}\sqrt{m_1 m_2}\ \pi\,\epsilon_F = N$$

da cui, con $\rho = N/A$ e $m^* = \sqrt{m_1 m_2}$

$$\epsilon_F = \frac{h^2 \rho}{4 m^* \pi} = \frac{\hbar^2 2\pi\rho}{2m^*}$$

(4)

$$E_0 = \sum_{S_z}\sum_{\bar{p}} \epsilon(\bar{p})\,\vartheta(\epsilon_F - \epsilon(\bar{p}))$$

$$= 2\int \frac{d\bar{p}}{\left(\frac{h}{L}\right)^2}\left(\frac{p_x^2}{2m_1} + \frac{p_y^2}{2m_2}\right)\vartheta\left(\epsilon_F - \frac{p_x^2}{2m_1} - \frac{p_y^2}{2m_2}\right)$$

$$= 2\frac{A}{h^2}\,2\sqrt{m_1 m_2}\int_{\tilde{p}_x^2+\tilde{p}_y^2 \le \epsilon_F} d\tilde{p}_x \int d\tilde{p}_y\ (\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2)$$

Si può ora passare a coordinate $\tilde{p}, \varphi$

$$E_0 = \frac{4Am^*}{h^2} \int_0^{\sqrt{\epsilon_F}} d\tilde{p}\, \tilde{p} \int d\varphi \; \tilde{p}^2$$

$$= \frac{8\pi A m^*}{h^2} \int_0^{\sqrt{\epsilon_F}} d\tilde{p}\; \tilde{p}^3 = \frac{8\pi A m^*}{h^2} \frac{\epsilon_F^2}{4}$$

Utilizziamo il risultato $\epsilon_F = h^2 \rho / (4\pi m^*)$

$$E_0 = \epsilon_F \cdot \frac{8\pi A m^*}{h^2} \frac{\epsilon_F}{4} = \epsilon_F \cdot \frac{2\pi A \cancel{m^*}}{\cancel{h^2}} \frac{\cancel{h^2} \rho}{4\pi \cancel{m^*}}$$

$$\boxed{E_0 = \frac{1}{2} N \epsilon_F}$$