Fisica Statistica. – A.A. 2010-2011, 22 Dicembre 2010

Secondo compito

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Fermioni non interagenti in 2 dimensioni a* $T = 0$

Si considerino N Fermioni di massa m e spin 1/2 liberi, non iteragenti, che si muovono in 2 dimensioni, ovvero su una porzione quadrata di piano di area $A = L^2$. Si usino condizioni al contorno periodiche o di Born-von Karman (PBC).

1. Si dica quali siano gli stati di particella singola e se ne forniscano le energie.
2. Pensando di occupare gli N stati di singola particella piu bassi in energia (a $T = 0$) si calcoli l'impulso di Fermi (ovvero l'impulso degli stati occupati piu alti in energia) e lo si esprima in termini di $n = N/A$.
3. Si calcoli l'energia $E(N, A)$ dello stato fondamentale, ottenuto occupando gli stati di singola particella con energia $\epsilon \leq \epsilon_F = p_F^2/(2m)$.
4. Si calcoli il potenziale chimico $\mu = \partial E(N, A)/\partial N$ e lo si valuti numericamente per $n = 10^{10} cm^{-2}$ e $m = 0.067 m_e$, ove m_e è la massa dell'elettrone ($m_e = 9.11 \times 10^{-28} g$).

Esercizio 2 *Fononi alla Debye in un cristallo bidimensionale*

Si considerino le piccole oscillazioni degli N atomi in un cristallo bidimensionale di area A; esse possono essere descritte in termini di $2N$ oscillatori armonici indipendenti con frequenze $\omega_{\mathbf{k},s} = ck$, $s = 1, 2$ e $k < k_D$. Assumeremo che le energie degli oscillatori siano date da $\hbar\omega_{\mathbf{k},s}\, n_{\mathbf{k},s}$, con $n_{\mathbf{k},s} = 0, 1, 2, \cdots$, ovvero che si possa trascurare il moto di punto zero.

1. Si calcoli la funzione di partizione.
2. Si calcoli l'enegia (a partire dal risultato del punto precedente) e la si manipoli in modo da esprimerla (per $T \to 0$) in termini di
$$\int_0^\infty dt\, \frac{t^2}{e^t - 1} \equiv \zeta(3) = 1.202.$$
3. Si calcoli il calore specifico a volume (area in questo caso) costante per $T \to 0$.
4. Sapendo che la densita areale di atomi è n, si calcoli il vettore di Debye; il vettore di Debye e definito in modo che l'area πk_D^2 contenga N valori di $\mathbf{k}$ (in PBC). Si valuti k_D numericamente quando $n = 10^9 cm^{-2}$.