Fisica Statistica. – A.A. 2018-2019, 21 dicembre 2018

Secondo compito

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1: *Fermioni di spin 1/2 in regime relativistico.*

Si considerino N fermioni di spin 1/2 liberi e non interagenti, condizioni periodiche al contorno, in un volume $V = L^3$, con livelli energetici $\epsilon(\mathbf{p}, S_z) = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}$, corrispondenti agli autostati dell'impulso con autovalori $\mathbf{p}$. m_0 è la massa a riposo del fermione.

1. Si ottenga l'espressioni dell'impulso di Fermi in termi di $\rho = N/V$.

   [**3 punti**]

2. Si calcoli l'energia *interna*

   $$E = \sum_{S_z, |\mathbf{p}|<p_F} [\epsilon(\mathbf{p}, S_z) - m_0c^2] \equiv \sum_{S_z, |\mathbf{p}|<p_F} \tilde{\epsilon}(\mathbf{p}, S_z)$$

   nei casi (i) $p_Fc \ll m_0c^2$ e (ii) $p_Fc \gg m_0c^2$.
   Per ottenere integrali elementari, nel caso (i) si sviluppi $\tilde{\epsilon}(\mathbf{p}, S_z)$ al primo ordine non nullo in (pc/m_0c^2), variabile sempre piccola nell'intervallo d'integrazione; nel caso (ii), considerato che i contributi dominanti alla somma provengono da impulsi di ordine p_F si sviluppi $\tilde{\epsilon}(\mathbf{p}, S_z)/(pc)$, funzione della variabile (m_0c^2/pc) considerata sempre piccola, pure al primo ordine non nullo.

   [**6 punti**]

3. Si calcoli, sempre nei casi (i) e (ii) la pressione $P = -\partial E/\partial V|_N$, dando in ciascun caso il rapporto $P/(E/V)$.

   [**4 punti**]

4. Supponendo ora e solo ora che i fermioni in questione siano neutrini ($m_0 = 0$) con densità di una particella per cm^3, si valuti numericamente l'energia di Fermi in eV (si ricorda che $1eV = 1.60 \times 10^{-12} erg = 1.60 \times 10^{-19} joule$).

   [**2 punti**]

Esercizio 2: *Bosoni di spin 0, in dimensione D e livelli energetici con legge a potenza*

Si considerino N bosoni di spin 0, liberi e non interagenti in dimensione D. L'operatore hamiltoniano è

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_s \hat{\mathbf{p}}_i^s,$$

e quindi gli autovettori dell'hamiltoniana coincidono con quelli dell'operatore impulso $\hat{\mathbf{p}}$ ed hanno autovalori $\epsilon(\mathbf{p}) = \gamma_s p^s$, ove p è un autovalore dell'impulso e $\gamma_s > 0$ una costante tale che $\gamma_s p^s$ ha le dimensioni di un'energia.

1. Utilizzando le relazioni date in nota e condizioni al contorno periodiche si calcoli $\log[Z(z, T, V)]/V$, ove $V = L^D$ è il volume di un ipercubo in dimensione $D > 0$, come funzione di z e $\beta = 1/K_B T$.

   [**5 punti**]

2. Utilizzando il risultato ottenuto al punto precedente si calcoli la densità di energia per unità di volume E/V come funzione di z e $\beta = 1/K_B T$

   [**3 punti**]

3. Si ricavi il valore del rapporto $P/(E/V)$, ove P è la pressione.

   [**3 punti**]

4. Utlizzando il risultato del primo punto, si calcoli la densità media di particelle $\rho = \langle N \rangle / V$ (ignorando il contributo anomalo $\rho_0 = z/[V(1-z)]$) e si ottenga la condizione su D ed s, perché ci sia condensazione di Bose.

   [**4 punti**]

NOTA:

1. In coordinate sferiche in dimensione D l'integrale su tutto lo spazio dell'impulso è: $\int d\mathbf{p} = \int d\Omega_D \int dp\, p^{D-1}$ e evidentemente $\int d\Omega_D = \Omega_D$, ove $\Omega_d > 0$ l'angolo solido in dimensione D.

2. Per $|x| < 1$, $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$.

3. Si ricorda la definizione $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt\, t^{z-1} e^{-t}$ e si assume che si conoscano valori notevoli di tale funzione.