Fisica Statistica. – A.A. 2010-2011, 21 Dicembre 2012

Secondo compito

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Fermioni non interagenti in 2 dimensioni, con dispersione lineare, a $T = 0$

Si considerino N Fermioni di spin 1/2 liberi, non iteragenti, che si muovono in 2 dimensioni, su una porzione quadrata di piano di area $A = L^2$. Si usino condizioni al contorno periodiche o di Born-von Karman (PBC) e si assumano livelli di energia di singola particella $\epsilon(\vec{p}, S_z) = \alpha p$, ove evidentemente $\vec{p}$ è l'autovalore dell'impulso ed S_Z quello della proiezione dello spin lungo l'asse z.

1. Pensando di occupare gli N stati di singola particella piu bassi in energia (a $T = 0$) si calcoli l'impulso di Fermi (ovvero l'impulso degli stati occupati piu alti in energia) e lo si esprima in termini di $n = N/A$.
2. Si calcoli l'energia $E(N, A)$ dello stato fondamentale, ottenuto occupando gli stati di singola particella con energia $\epsilon \leq \epsilon_F = \alpha p_F$.
3. Si calcoli il potenziale chimico $\mu = \partial E(N, A)/\partial N$ e lo si valuti numericamente per $n = 10^{12} cm^{-2}$ e $\alpha = 10^8 cm/s$.
4. Si calcoli infine la pressione, che a temperatura nulla ed in 2 dimensioni è definita da $P = -\partial E(N, A)/\partial A$.

Esercizio 2 *Gas ideale di Bosoni in 1 dimensione*

Si consideri un sistema di N Bosoni di spin 0 liberi, non interagenti, che si muovono in 1 dimensione sul segmento L, con energie di singola particella $\epsilon_{\mathbf{p}} = p^2/2m$; si usino condizioni al contorno periodiche (Born-von Karman).

1. Si calcoli la densità media $\rho = \langle N \rangle / L$ in termini della fugacità z e della lunghezza d'onda termica λ, trascurando il termine corrispondente a $p = 0$. Si sfrutti a questo scopo lo sviluppo in serie

$$\frac{1}{1 - ze^{-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (ze^{-t^2})^n,$$

valido per $z < 1$.

2. Si dica se in 1 dimensione ci sia condensazione di Bose e perché.

3. Si calcoli l'equazione di stato (ovvero la funzione di gran partizione) esprimendo βP in termini di z ed λ. Si usi il fatto che

$$-ln(1 - ze^{-t^2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ze^{-t^2})^n}{n}.$$

4. Utilizzando i risultati dei precedenti punti 2 e 3 si consideri il limite classico, ovvero piccoli valori del parametro di degenerazione $\lambda\rho$, per ottenere la prima correzione quantistica non nulla all'equazione di stato classica.

NOTA:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\pi/\alpha}$$