Fisica Statistica. – A.A. 2016-2017, 20 Dicembre 2016

Secondo compitino

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Termodinamica della radiazione di corpo nero*

Si consideri la radiazione di corpo nero in una cavità cubica metallica, di volume $V = L^3$. Le onde stazionarie che descrivo la radiazione all'interno della cavità hanno frequenze $\omega(\mathbf{k}) = ck$, con c la velocità della luce; i $\mathbf{k}$ obbediscono condizioni al contorno periodiche.

1. Si calcoli la funzione di partizione $Q(V,T)$ esplicitamente in termini di V, T e costanti fondamentali e da essa si ottenga un'espressione per l'energia libera $A(V,T)$.

   Può risultare utile lo sviluppo in serie del logaritmo $-\ln(1-y) = \sum_{n=1}^{\infty}(y^n/n)$, valido per $-1 < y < 1$, e $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \pi^4/90$.

2. Utilizzando il risultato per $A(V,T)$ si ottenga l'entropia $S(V,T)$ della radiazione nella cavità.

3. Utilizzando il risultato per $A(V,T)$ si ottenga $P(T)$.

4. Si calcoli la temperatura alla quale la pressione all'interno della cavità vale $1atm = 1.01 \cdot 10^5 Pa$, sapendo che in SI $K_B = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$ e $\hbar = 1.06 \cdot 10^{-34} J \cdot s$.

Esercizio 2 *Suscettività magnetica di Pauli a $T = 0$*

La densità di stati in energia di un gas di Fermioni non interagenti e liberi, di spin 1/2, in 3 dimensioni e con condizioni al contorno periodiche vale:

$$g(E) = \frac{2}{V}\sum_{\mathbf{k}} \delta(E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}) = \frac{3\rho\sqrt{E}}{2E_F^{3/2}}\theta(E),$$

ove $E_F = \hbar^2(3\pi^2\rho)^{2/3}/(2m)$ è l'energia di Fermi. Quando viene applicato un campo magnetico lungo l'asse z e con intensità H gli autostati di singola particella acquisiscono una dipenda dalla proiezione dello spin lungo il campo ($\sigma = \pm 1$) ed i corrispondenti autovalori diventano $\epsilon(\mathbf{k}, \sigma) = \hbar^2 k^2/(2m) + \sigma\mu_B H$,. È facile mostrare che la densità di stati in energia per gli elettroni con proiezione di spin σ è

$$g_\sigma(E) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \delta(E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \sigma\mu_B H) = \frac{1}{2}g(E - \sigma\mu_B H).$$

Parimenti si può mostrare che, a $T = 0$ ed in presenza di un campo magnetico debole $H \ll E_F/\mu_B$, il livello energetico più alto occupato, che denoteremo con μ, sarà coincidente con E_F a meno di piccole correzioni $o((\mu_B H/\epsilon_F)^2)$, che trascureremo.

1. Si calcoli la densità media degli elettroni con proiezione di spin σ in presenza di un campo magnetico debole a $T = 0$,

$$\rho_\sigma(H) = \int_{E<E_F} dE\, g_\sigma(E)^*.$$

2. Poiché il momento magnetico di un elettrone vale $-\sigma\mu_B$, un campo magnetico induce un densità di magnetizzazione

$$M(H, \rho) = -\mu_B(\rho_+(H) - \rho_-(H))$$

nel gas di Fermioni. Utilizzando il risultato del punto precedente si calcoli $M(H, \rho)$ e la si approssimi ad ordine dominante in H per un campo magnetico debole.

3. Si calcoli la suscettività magnetica di spin (o suscettività di Pauli) definita da

$$\chi_P = \left.\frac{\partial M}{\partial H}\right|_{H=0}.$$

4. Si esprima il risultato ottenuto al punto precedente in termini della densità di stati al livello di Fermi $g(E_F)$.

* L'equazione nel testo fornito agli studenti il 20.12.16 conteneva, per un errore di battitura una extra fattore E nell'integrando. L'errore è stato corretto all'inizio della seconda ora della prova (che durava tre ore).