Fisica Statistica. – A.A. 2015-2016, 18 Dicembre 2015

Primo compitino

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 2 *Fermioni di spin 1/2 con dispersione lineare*

Si considerino N Fermioni non interagenti di spin 1/2 che si muovono in una dimensione su un segmento di lunghezza L, con condizioni al contorno periodiche e con livelli di energia di singola particella $\epsilon(p) = \alpha|p|$, con $\alpha > 0$ e p il momento della quantità di moto (nel seguito momento). Si ricorda che p ha valori sia positivi che negativi!

1. Si calcoli la densità di stati in energia, per unità di lunghezza, nel limite termodinamico ($N, L \to \infty, \quad \rho = N/L =$costante):
$$g(E) = \frac{2}{L}\sum_p \delta(E - \varepsilon_p).$$
2. Si calcoli la densità media $\rho = \langle N \rangle / L$ in termini della fugacità z e della lunghezza caratteristica l definita da $l = (\alpha h / 4K_B T)$, ove h è la costante di Plank.
NOTA. L'integrale che dà ρ in termini di T, z è un integrale elementare calcolabile esattamente, senza ricorrere ad alcuno sviluppo in serie.
3. Utilizzando il risultato del punto precedente si ottenga il potenziale chimico $\mu(T, \rho)$ e poi $\mu_0(\rho) = \lim_{T\to 0}[\mu(T, \rho)]$.
4. Ci si ponga ora a $T = 0$ e si calcoli il momento di Fermi p_F (modulo del momento più alto occupato nello stato fondamentale). Si ponga $\varepsilon_F = \alpha p_F$ e si dica che relazione ci sia tra $\mu_0(\rho)$ e ε_F.

Esercizio 1: *Bosoni non interagenti e liberi in 5 dimensioni*

Si considerino dei Bosoni di massa m e spin 0 con livelli dell'energia di singola particella $\epsilon(\mathbf{p}) = p^2/2m$ e condizioni al contorno periodiche.

1. Si calcoli la densità di stati in energia per unità di volume

$$g(E) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}} \delta(E - \frac{p^2}{2m}),$$

   ove V è il volume di un ipercubo di lato L e l'angolo solido in 5 dimensioni vale $\Omega_5 = 8\pi^2/3$.

2. Si calcoli la densità media $\rho = \langle N\rangle/V$ in termini della fugacità z, della lunghezza d'onda termica e, per un volume grande ma finito, anche del volume V (cioè si includa il termine corrispondente a $\mathbf{p}$=0!). Si usi $[1 - ze^{-t}]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-nt}$. Si dovrebbe trovare che c'è condensazione.

3. Si ottenga un'espressione per le fluttuazioni di numero utilizzando l'identità

$$\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 = z\frac{\partial\langle N\rangle}{z}\bigg|_{T,V}.$$

4. Utilizzando il risultato per cui per grandi V ed al di sopra della densità critica $\rho_c(T)$ si ha $z \approx 1 - 1/N_0$, con N_0 il numero (quantità estensiva) di particelle nel condensato, si ottenga un'espressione per

$$\sqrt{\frac{\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2}{\langle N\rangle^2}}$$

   valida nel limite termodinamico ($V \to \infty$).