Fisica Statistica. – A.A. 2023-2024, 15 dicembre 2023

Secondo compitino

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Bosoni din spin 0 in 1D*

Si considerino N Bosoni non interagenti di spin 0 in una dimensione (1D) con hamiltoniana di particella singola $\hat{H}_1 = \alpha|\hat{p}|$, $\alpha > 0$, e $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ l'operatore impulso in 1D. Notando che $\alpha|\hat{p}| = \alpha\sqrt{\hat{p}^2}$ risulta chiaro che possiamo scegliere le autofunzioni di $\hat{H}_1$ come autofunzioni di $\hat{p}^2$, ovvero della forma $A \sin kx + B \cos kx$, con $p = \hbar k$; gli autovalori di $\hat{H}_1$ essendo $\epsilon(k) = \hbar\alpha|k|$.

1. Si impongano condizioni al contorno di pareti dure per determinare i valori ammessi di k .
2. Si calcoli la densità di stati in energia.
3. Si calcoli $\ln \mathcal{Z}/L$, come funzione di z, T, dando la condizione che z deve soddisfare affinche esista $\ln \mathcal{Z}$. La condizione di esistenza dovrebbe coinvolgere l'autovalore di energia minimo $\varepsilon_0 = \epsilon(k_{min})$
4. Utilizzando l'espressione trovata per $\ln \mathcal{Z}/L \equiv f(z, T)$ si calcoli la densità media $\rho = \langle N\rangle/L$ effetuando una semplice derivata. Si dica se nel limite termodinamico c' è condensazione di Bose e perché.

Esercizio 2: *Fermioni di spin 1/2 in 1 dimensione in regime di forte degenerazione*

Si considerino Fermioni di massa m e spin 1/2, non interagenti in 1 dimensione. Si considerino condizioni al contorno periodico.

1. Si calcoli l'impulso di Fermi p_F e l'energia di Fermi E_F.
2. Si calcoli la densità di stati in energia $g(E)$.
3. Utilizzando lo sviluppo di Sommerfeld (valido nel regime di alta degenerazione $\beta\mu >> 1$)
$$\int_0^\infty dE \frac{f(E)}{e^{\beta(E-\mu)}+1} \simeq \int_0^\mu dE f(E) + \frac{\pi^2}{6}(K_B T)^2 f'(\mu)$$
si calcoli la prima correzione in temperatura all'energia di Fermi, ovvero il potenziale chimico $\mu(T)$ ad ordine dominante in T, per piccole temperature.
4. Sempre nel regime di forte degenerazione si calcoli l'energia per unità di lunghezza, ad ordine dominante in T e da questa si calcoli il calore specifico a densità costante.