Fisica Statistica. – A.A. 2009-2010, 5 Febbraio 2010

Secondo scritto - primo appello

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Gas ideal di Bosoni in 2 dimensioni*

Si consideri un sistema di Bosoni di spin 0 liberi e non interagenti in 2 dimensioni e si usino condizioni al contorno periodiche (Born-von Karman).

1. Si calcoli esplicitamente la densità di stati in energia, per unità d'area:

$$g(E) = \frac{1}{A} \sum_{\mathbf{p}} \delta(E - \frac{p^2}{2m}),$$

ove A è l'ara del sistema.

2. Si calcoli la densità media $\rho = \langle N \rangle / A$ in termini della fugacità z e della lunghezza d'onda termica λ. Si ricorda che $\lambda^2 = h^2/(2\pi m \; K_B T)$ e si trascuri il termine corrispondente a $\mathbf{p} = 0$. L'integrale da calcolare è esprimibile in termini di una funzione elementare.

3. Si calcoli l'equazione di stato (ovvero la funzione di gran partizione) esprimendo βP in termini di z e λ . Si usi il fatto che $-\int_0^\infty dt \, log(1 - z\, e^{-t}) = g_2(z) = \sum_{n=1}^\infty z^n/n^2$.

4. Utilizzando il risultato del punto 2 si consideri il limite classico, ovvero piccoli valori del parametro di degenerazione $\lambda^2 \rho$, per ottenere la prima correzione quantistica non nulla all'equazione di stato ottenuta al punto precedente.

Esercizio 2

Si considerino gli elettroni nel Grafene come Fermioni di spin 1/2, in 2 dimensioni, liberi e non interagenti, con condizioni al contorno periodiche (Born-von Karman) ed energie di singola particella $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \alpha p$. Per semplicità si consideri il sistema polarizzato in spin.

1. Si calcoli esplicitamente la densità di stati in energia, per unità d'area:

$$g(E) = \frac{1}{A}\sum_{\mathbf{p}} \delta(E - \varepsilon_{\mathbf{p}}).$$

2. Si calcoli la densità media $\rho = \langle N \rangle / A$ in termini della fugacità z e della lunghezza caratteristica l definita da $l^2 = \alpha^2 h^2 / (2\pi K_B^2 T^2)$; si usi altresì la relazione

$$\int_0^\infty dy\, y \frac{ze^{-y}}{1 + ze^{-y}} = f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n / n^2.$$

   L'ultima eguaglianza vale solo per $z < 1$.

3. Si calcoli l'equazione di stato (ovvero la funzione di gran partizione) esprimendo βP in temini di z e λ. Si usi la relazione

$$\int_0^\infty dy\, y \log(1 + ze^{-y}) = f_3(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n / n^3.$$

   L'ultima eguaglianza vale solo per $z < 1$.

4. Utilizzando il risultato del punto 2 si consideri il limite classico, ovvero piccoli valori di $l^2\rho$, per ottenere la prima correzione quantistica non nulla all'equazione di stato, calcolata al punto precedente.