

Primo compito

(tempo 3 ore)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Particelle indipendenti in una trappola armonica bidimensionale*

L'intrappolamento in trappole armoniche di atomi in regime di interazione debolissima è diventata molto *popolare* negli ultimi anni, ancorché in regimer quantistico. Qui consideriamo un equivalente classico in 2 dimensioni.

Si considerino N particelle, non interagenti e con massa m , costrette a muoversi sulla regione di piano $0 \leq r \leq R$, in presenza di un potenziale armonico $v(r) = m\omega^2 r^2/2$ e $r = |\mathbf{r}|$ la distanza dall'origine nel piano.

1. Si calcoli la funzione di partizione canonica di questo sistema e da questa si ricavi l'energia libera di Helmholtz A .
2. Si calcoli la pressione esercitata dalle particelle sulla circonferenza che le contiene (il contenitore in 2 dimensioni!) considerando la variazione dell'area S a loro disposizione: $S = \pi R^2 \rightarrow \pi(R + \delta R)^2 = S + \delta S$, con $\delta S = 2\pi R \delta R$ ad ordine dominante in δR . Evidentemente in 2 dimensioni definiamo la pressione come $P = -\partial A / \partial S$.
3. Si calcoli il potenziale chimico.
4. Si calcoli il profilo di densità $\rho(r) = N \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \rangle$. Si provi ad esprimere pressione e potenziale chimico utilizzando $\rho(r)$: in μ e P appaiono le densità valutate a quali distanze r ?

Esercizio 2: Potenziali termodinamici intensivi

Nel seguito, consideriamo i potenziali termodinamici estensivi: energia libera di Gibbs G , energia libera di Helmholtz F , energia E ed entalpia H .

Ricordiamo che (a) i potenziali termodinamici estensivi sono funzioni omogenee di primo grado nelle variabili estensive e (b) che per una funzione $F(X_1, X_2, \dots, X_m; y_1, y_2, \dots, y_n)$, omogenea di grado k nelle variabili X_1, X_2, \dots, X_m e funzione anche delle variabili y_1, y_2, \dots, y_n , vale l'identità

$$\sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial X_i} F(X_1, X_2, \dots, X_m; y_1, y_2, \dots, y_n) = kF(X_1, X_2, \dots, X_m; y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (1)$$

L'equazione (1), applicata ai potenziali termodinamici menzionati, ne fornisce delle nuove espressioni che contengono esplicitamente le derivate del potenziale stesso, ad esempio contengono esplicitamente il potenziale chimico μ .

1. Si specializzi l'equazione (1) a G e calcolando i differenziali dei due termini si ottenga il differenziale $d\mu$ del potenziale chimico, che risulterà funzione di sole variabili intensive; quali? Si denotino con s e v , rispettivamente l'entropia per particella e il volume per particella.
2. Si specializzi l'equazione (1) a F , si ottenga un'espressione dell'energia libera di Helmholtz per particella $f = F/N$ e se ne calcoli il differenziale. Si scoprirà che a è funzione di due sole variabili intensive; quali?
3. Si specializzi l'equazione (1) a E , si ottenga un'espressione dell'energia per particella $e = E/N$ e se ne calcoli il differenziale. Si scoprirà che e è funzione di due sole variabili intensive; quali?
4. Si specializzi l'equazione (1) a H , si ottenga un'espressione dell'entalpia per particella $h = H/N$ e se ne calcoli il differenziale. Si scoprirà che h è funzione di due sole variabili intensive; quali?