

**Primo compito**

(tempo 3 ore)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

**Esercizio 1** *Particelle indipendenti in una trappola armonica bidimensionale*

L'intrappolamento in trappole armoniche di atomi in regime di interazione debolissima è diventata molto *popolare* negli ultimi anni, ancorché in regimer quantistico. Qui consideriamo un equivalente classico in 2 dimensioni.

Si considerino  $N$  particelle, non interagenti e con massa  $m$ , costrette a muoversi sulla regione di piano  $0 \leq r \leq R$ , in presenza di un potenziale armonico  $v(r) = m\omega^2 r^2/2$  e  $r = |\mathbf{r}|$  la distanza dall'origine nel piano.

1. Si calcoli la funzione di partizione canonica di questo sistema e da questa si ricavi l'energia libera di Helmholtz  $A$ .
2. Si calcoli la pressione esercitata dalle particelle sulla circonferenza che le contiene (il contenitore in 2 dimensioni!) considerando la variazione dell'area  $S$  a loro disposizione:  $S = \pi R^2 \rightarrow \pi(R + \delta R)^2 = S + \delta S$ , con  $\delta S = 2\pi R \delta R$  ad ordine dominante in  $\delta R$ . Evidentemente in 2 dimensioni definiamo la pressione come  $P = -\partial A / \partial S$ .
3. Si calcoli il potenziale chimico.
4. Si calcoli il profilo di densità  $\rho(r) = N \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \rangle$ . Si provi ad esprimere pressione e potenziale chimico utilizzando  $\rho(r)$ : in  $\mu$  e  $P$  appaiono le densità valutate a quali distanze  $r$ ?

### Esercizio 2: Potenziali termodinamici intensivi

Nel seguito, consideriamo i potenziali termodinamici estensivi: energia libera di Gibbs  $G$ , energia libera di Helmholtz  $F$ , energia  $E$  ed entalpia  $H$ .

Ricordiamo che (a) i potenziali termodinamici estensivi sono funzioni omogenee di primo grado nelle variabili estensive e (b) che per una funzione  $F(X_1, X_2, \dots, X_m; y_1, y_2, \dots, y_n)$ , omogenea di grado  $k$  nelle variabili  $X_1, X_2, \dots, X_m$  e funzione anche delle variabili  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , vale l'identità

$$\sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial X_i} F(X_1, X_2, \dots, X_m; y_1, y_2, \dots, y_n) = kF(X_1, X_2, \dots, X_m; y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (1)$$

L'equazione (1), applicata ai potenziali termodinamici menzionati, ne fornisce delle nuove espressioni che contengono esplicitamente le derivate del potenziale stesso, ad esempio contengono esplicitamente il potenziale chimico  $\mu$ .

1. Si specializzi l'equazione (1) a  $G$  e calcolando i differenziali dei due termini si ottenga il differenziale  $d\mu$  del potenziale chimico, che risulterà funzione di sole variabili intensive; quali? Si denotino con  $s$  e  $v$ , rispettivamente l'entropia per particella e il volume per particella.
2. Si specializzi l'equazione (1) a  $F$ , si ottenga un'espressione dell'energia libera di Helmholtz per particella  $f = F/N$  e se ne calcoli il differenziale. Si scoprirà che  $a$  è funzione di due sole variabili intensive; quali?
3. Si specializzi l'equazione (1) a  $E$ , si ottenga un'espressione dell'energia per particella  $e = E/N$  e se ne calcoli il differenziale. Si scoprirà che  $e$  è funzione di due sole variabili intensive; quali?
4. Si specializzi l'equazione (1) a  $H$ , si ottenga un'espressione dell'entalpia per particella  $h = H/N$  e se ne calcoli il differenziale. Si scoprirà che  $h$  è funzione di due sole variabili intensive; quali?