

Fisica Statistica. – A.A. 2020-2021, 14 Novembre 2020

Secondo scritto - secondo appello

(tempo 3 ore)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

**Esercizio 1** *Particelle in campo esterno*

Si considerino  $N$  particelle non interagenti in un contenitore sferico di volume  $V$ : l'hamiltoniana è

$$H = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2m} \mathbf{p}_i^2 - v_0 \cos \theta_i \right],$$

con  $\theta_i$  l'angolo polare, ovvero l'angolo con l'asse  $z$  del vettore posizione della particella  $i$ -esima.

1. Si calcoli la funzione di partizione canonica e da questa l'energia libera di Helmholtz  $A$ .
2. Si calcoli l'energia media  $E$ .
3. Si calcoli l'entropia  $S$ .
4. Si calcoli il valor medio del coseno dell'angolo polare

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1, N} \langle \cos \theta_i \rangle$$

e se ne faccia un disegno semiquantitativo in funzione di  $\beta v_0$ .

### Esercizio 2 *Particelle noninteragenti in un campo gravitazionale*

Si considerino  $N_1$  particelle di massa  $m_1$  e  $N_2$  particelle di massa  $m_2$ , non interagenti ed in un contenitore di volume  $V$ , con base di area  $A_b$  ed altezza  $L_z$ . Le particelle sono soggette al potenziale gravitazionale, rispettivamente ad  $m_1gz$  le particelle con massa  $m_1$  e  $m_2gz$  le particelle con massa  $m_2$ . Le particelle di ciascun tipo (massa) sono tra di loro indistinguibili, ma particelle dei due tipi avendo massa diversa sono evidentemente distinguibili.

1. Si calcoli la funzione di partizione canonica di questo sistema e da questa si ricavi l'energia libera di Helmholtz  $A$ . Si consiglia di porre:  $l_1 = K_B T / (m_1 g)$ ,  $l_2 = K_B T / (m_2 g)$ ,  $\lambda_1^2 = h^2 / (2\pi m_1 K_B T)$ ,  $\lambda_2^2 = h^2 / (2\pi m_2 K_B T)$ .
2. Si calcoli la pressione considerando la variazione di volume  $V = A_b L_z \rightarrow A_b(L_z + \delta L_z) = V + \delta V$ .
3. Si calcoli l'entropia.
4. Si calcolino i profili di densità  $\rho_\alpha(z) = N_\alpha \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^{(\alpha)}) \rangle$ ,  $\alpha = 1, 2$ , ove  $\mathbf{r}_i^{(\alpha)}$  denota una particella con massa  $m_\alpha$ . Si faccia un disegno qualitativo delle due densità nel caso in cui  $N_1 = N_2$ ,  $m_2 = 2m_1$  e  $L_z \gg l_1 = K_B T / (m_1 g)$ .