Fisica Statistica. – A.A. 2021-2022, 12 Novembre 2021

I Compitino

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Particelle relativistiche in un campo gravitazionale*

Si consideri nell'insieme canonico un sistema di N particelle classiche indipendenti, in un volume V e con hamiltoniana

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_1(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^{N} (c|\mathbf{p}_i| + mgz_i)\,,$$

on c la velocità della luce e m la massa delle particelle.

1. Si scriva la funzione di partizione canonica $Q_N(V,T,c,m)$ in termini di H (senza sfruttare la separabilità!), come integrale nello spazio delle fasi e senza calcolarla esplicitamente, e si mostri che
$$-K_B T m \frac{\partial \ln Q_N(V,T,c,m)}{\partial m} = \langle \sum_{i=1}^{N} mgz_i \rangle \equiv U, \tag{1}$$
ove U è evidentemente l'energia potenziale media.

2. In modo simile si mostri che
$$-K_B T c \frac{\partial \ln Q_N(V,T,c,m)}{\partial c} = \langle \sum_{i=1}^{N} c\mathbf{p}_i \rangle \equiv \mathcal{K}, \tag{2}$$
ove $\mathcal{K}$ è l'energia cinetica media.

3. Si calcoli ora e solo ora la funzione di partizione canonica $Q_N(V,T,c,m)$ in termini dei parametri N, V, T, c, m. Si sostituisca quindi l'espressione trovata per $Q_N(V,T,c,m)$ nelle equazioni (1) e (2) ed effettuando le derivate si ottengano l'energia potenziale e l'energia cinetica medie.

4. A partire dalla risposta al punto precedente, si ricavino espressioni di U valide ad ordine dominante rispettivamente per $mgL_z/K_BT \gg 1$ e $mgL_z/K_BT \ll 1$.

Esercizio 2 *Gas ideale in 3 dimensioni nell'Ensemble Isobarico*

Si considerino N particelle indistinguibili di massa m, non interagenti, in 3 dimensioni ed in assenza di potenziali esterni.

1. La funzione di partizione dell'ensemble isobarico è definita da

$$\tilde{Z}(N,P,T) = \beta P \int_0^\infty dV e^{-\beta PV} Q_N(V,T,).$$

   Si può mostrare che $\tilde{Z}(N,P,T) = e^{-\beta G(N,P,T)}$, ove $G(N,P,T)$ è l'energia libera di Gibbs.

   Si calcoli $\tilde{Z}(N,P,T)$ per il gas ideale, ricordando che $Q_N(V,T) = (V/\lambda_T^3)^N/N!$ e si ottenga $G(N,P,T)$.

2. A partire dall'espressione ottenuta per $G(N,P,T)$ si ottenga il potenziale chimico $\mu(P,T)$.

3. Similmente si ottenga l'espressione di $V(N,P,T)$.

4. Utilizzando l'espressione ottenuta per $V(N,P,T)$ per esprimere P in termini V,N,T, si ottenga $\mu(N/V,T)$.

NOTA:

- $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty dt\, t^{\alpha-1} e^{-t}$;
- è necessario ricordare il differenziale di $G(N,P,T)$.