Fisica Statistica. – A.A. 2009-2010, 10 Giugno 2010

Primo scritto - secondo appello

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Sistema di particelle distinguibili con 2 livelli d'energia, nel Microcanonico.*

Si consideri un sistema di N particelle classiche distinguibili: ciascuna particella può avere energia 0 od ϵ. Se definiamo la configurazione $\{n\} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$, ove ciascuno dei numeri n_i può assumere i valori 0 ed 1, allora $E(\{n\}) = \sum_{i=1}^{N} \epsilon n_i$ è l'energia totale del sistema per la particolare configurazione $\{n\}$. Si consideri il sistema nell'insieme microcanonico e quindi a fissati E ed N.

1. Si calcoli l'estensione $\Omega(N, E)$ dello spazio delle fasi, osservando che $\sum_{i=1}^{N} \epsilon n_i = E = N_1\epsilon$, con N_1 il numero di particelle ad energia ϵ; evidentemente il numero di particelle con energia 0 è $N_0 = N - N_1$. È naturale scegliere $\Omega(N, E)$ come il numero di configurazioni $\{n\}$ con energia E. Si assuma che entrambi N_1 ed $N - N_1$ siano abbastanza grandi da poter utilizzare la formula di Stirling per approssimare i relativi fattoriali.
2. Da $S(E, N) = K_B \log[\Omega(E, N)]$ si ottenga la temperatura T.
3. Si esprima E in funzione di N e T.
4. Si ricavino le espressioni di N_1 ed N_0 in termini di N e T.

Esercizio 2 *Gas ideale di Bosoni in 1 dimensione*

Si consideri un sistema di N Bosoni di spin 0 liberi, non interagenti, che si muovono in 1 dimensione sul segmento L, con energie di singola particella $\epsilon_{\mathbf{p}} = \alpha|p|$; si usino condizioni al contorno periodiche (Born-von Karman).

1. Si calcoli esplicitamente la densità di stati in energia, per unità d'area:

$$g(E) = \frac{1}{L}\sum_{\mathbf{p}} \delta(E - \alpha|p|).$$

2. Si calcoli la densità media $\rho = \langle N \rangle / L$ in termini della fugacità z e della lunghezza caratteristica $l = \alpha h / K_B T$. Si trascuri il termine corrispondente a $\mathbf{p} = 0$. L'integrale da calcolare è esprimibile in termini di una funzione elementare.

3. Si calcoli l'equazione di stato (ovvero la funzione di gran partizione) esprimendo βP in termini di z ed l . Si usi il fatto che $-\int_0^\infty dt\, log(1 - z\, e^{-t}) = g_2(z) = \sum_{n=1}^\infty z^n/n^2$; se in grado di farlo, si dimostri tale relazione.

4. Utilizzando il risultato del punto 2 si consideri il limite classico, ovvero piccoli valori del parametro di degenerazione $l\rho$, per ottenere la prima correzione quantistica non nulla all'equazione di stato ottenuta al punto precedente.