Fisica Statistica. – A.A. 2017-2018, 17 novembre 2017

Primo compito

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1: *Ensemble Canonico per particelle in un campo armonico in 1 dimensione*

Si considerino N particelle non interagenti in 1 dimensione confinate da un potenziale armonico: l'hamiltoniana è

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{m\omega^2}{2} q_i^2 \right] .$$

Le particelle sono libere di muoversi su tutto l'asse reale.

1. Si La funzione di partizione canonica $Q_N(T)$ e da questa l'energia libera di Helmoltz $A(N, T)$.

   [**6 punti**]

2. Si calcoli l'energia $E(N, T)$.

   [**3 punti**]

3. Si calcoli l'entropia $S(N, T)$.

   [**3 punti**]

4. Si calcoli il potenziale chimico $\mu(N, T)$.

   [**3 punti**]

Esercizio 2: *Ensemble Microcanonico per particelle in un campo armonico in 1 dimensione*

Si considerino N particelle non interagenti in 1 dimensione confinate da un potenziale armonico: l'hamiltoniana è

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{m\omega^2}{2} q_i^2 \right].$$

1. Si calcoli il volume di spazio delle fasi con energia minore o uguale ad E:

   $$\Sigma(E, N) = \frac{1}{h^N N!} \int dp_1 \int dp_2 \ldots \int dp_N \int dq_1 \int dq_2 \ldots \int dq_N, \quad H \leq E$$

   e da questo l'entropia $S(E, N)$. Si richiama l'attenzione sul fatto che il dominio di integrazione è determinato dalla condizione $H \leq E$. Si invita a seguire i suggerimenti riportati in basso, facendo il parallelo con il calcolo della Σ per il gas ideale.

   [**6 punti**]

2. Si calcoli la temperatura nel microcanico $T(E, N)$ e si inverta la relazione trovata per ottenere $E(N, T)$.

   [**3 punti**]

3. Utilizzando il risultato precedente, si esprima l'entropia trovata al punto 1 come funzione di N, T e si ricavi l'espressione dell'energia libera di Helmoltz $A(N, T)$.

   [**3 punti**]

4. Utilizzando l'espressione per $A(N, T)$ trovata al punto precedente si calcoli il potenziale chimico come funzione di N, T.

   [**3 punti**]

NOTA: Si consiglia di passare alle variabili: $x_i = p_i(1/\sqrt{2m})$, $x_{i+N} = q_i \omega \sqrt{m/2}$, $\quad i = 1, \ldots, N$, in modo che nelle nuove variabili $H = \sum_{i=1}^{2N} x_i^2$.

Si ricorda altresì che il volume di una ipersfera di raggio R in dimensione n è $\Omega_n = C_n R^n$ con $C_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2 + 1)$, $\quad \Gamma(n/2 + 1) \simeq [(n/2)/e]^{n/2}$.