Fisica Statistica. – A.A. 2012-2013 e precedenti, 16 Novembre 2012

Primo compitino

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Particelle cariche in campo elettrico*

Si considerino N particelle con carica $-e$ ($e > 0$) e massa m che si muovono tra due contenitori cilindrici coassiali (quello esterno di di altezza L) e raggi R_0 ed R, $R > R_0$; il contenitore esterno è chiuso agli estremi inferiore e superiore. Il cilindro interno (di lunghezza infinita) ha una densità di carica superficiale uniforme $\sigma > 0$, così che le particelle sono soggette ad un campo elettrico ortogonale all'asse del cilindro che in unità cgs è $E(s) = 2\gamma/s$ ove $\gamma = 2\pi\sigma R_0$ e s è la distanza dall'asse del cilindro. Si consideri nel seguito il caso nel quale $e\gamma/K_BT = 1/2$ e si trascurino gli effetti del campo gravitazionale. Si considerino le particelle come non interagenti tra di loro.

1. Si calcoli la funzione di partizione canonica di questo sistema e da questa si ricavi l'energia libera di Helmoltz A.
2. Si calcoli la pressione considerando la variazione del volume a loro disposizione $V = \pi(R^2 - R_0^2)L$ ottenuta variando il raggio esterno R.
3. Si calcoli il potenziale chimico μ.
4. Si calcoli il profilo di densità $n(s) = N\langle\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\rangle$, ove $\mathbf{r} = (\mathbf{s}, z)$ e $R_0 \leq s \leq R$. Si provi ad esprimere pressione e potenziale chimico utilizzando $\rho(s)$: in μ e P appaiono le densità valutate a quali valori di s?

Esercizio 2: *Teoria delle perturbazioni per particelle classiche in un potenziale esterno*

Si considerino N particelle indipendenti (ovvero, non interagenti) in regime classico; le particelle sono contenute in un contenitore di volume V, con base di area A_b ed altezza L_z e soggette ad un potenziale $v(z)$. L'hamiltoniana è quindi somma delle hamiltoniane di singola particella. L'hamiltoniana di singola particella è:

$$h = \frac{p^2}{2m} + v(z), \quad \text{con} \quad v(z) = mgz[1 + \lambda \frac{z}{L_z}] \equiv K_B T \frac{z}{l}[1 + \lambda \frac{z}{L_z}]. \tag{1}$$

Nel seguito considereremo il caso nel quale l'altezza del contenitore è molto piu grande della lunghezza *gravitazionale* , $L_Z \gg l = K_B T/mg$; quindi negli integrali configurazionali si potrà rimpiazzare l'estremo superiore L_z dell'integrazione in z con ∞. Altrove L_z va tenuto finito.

1. Si calcoli *esplicitamente* la funzione di partizione canonica $Q_N(A_b, L_z, T; \lambda)$ al primo ordine in λ. Si ricorda che calcolare la funzione $f(\lambda)$ al primo ordine significa porre $f(\lambda) \simeq f(0) + f'(0)\lambda$, con ovvia notazione. Si consiglia di partire dallo sviluppo al primo ordine dell'integrale configurazionale per la singola particella!

2. Si calcoli, sempre al primo ordine in λ, l'energia libera di Helmoltz.

3. Si calcoli al primo ordine in λ l'energia interna.

4. Si calcoli al primo ordine in λ il calore specifico.