Fisica Statistica. – A.A. 2019-2020, 6 novembre 2019

Primo compito

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Miscela di due gas nel microcanonico*

Si consideri una miscela di 2 gas nell'ensemble microcanonico in 3 dimensioni. Il sistema è composto da 2 componenti: le particelle di massa m_1 in numero N_1 e le particelle di massa m_2 in numero N_2. L'energia totale è E e le particelle si muovono all'interno del volume V. N_1, N_2, E, V sono da considerare macroscopici. Le particelle non interagiscono né tra di loro né con campi esterni e quindi

$$H = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_1} + \sum_{i=1}^{N_2} \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m_2}.$$

1. (**6 punti**) Si calcoli il volume dello spazio delle fasi $\Sigma(E, V, N_1, N_2)$ e da questo si ottenga l'entropia $S(E, V, N_1, N_2)$, tenendo presente che le particelle del tipo 1 sono distinguibili da quelle del tipo 2 (masse diverse!), mentre le particelle di un dato tipo sono tra loro indistinguibili. Ovviamente

   $$\Sigma(E, V, N_1, N_2) \propto \int_{H \le E} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{p}_{N_1} d\mathbf{P}_1 d\mathbf{P}_2 \dots d\mathbf{P}_{N_2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_{N_1} d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \dots d\mathbf{R}_{N_2}.$$

   Si faccia attenzione ai fattori che moltiplicano l'integrale e assicurano (i) che $\Sigma(E, V, N_1, N_2)$ sia adimensionale e (ii) che distinguibilità e indistinguibilità sia correttamente tenute in conto.

2. (**3 punti**) In un sistema a 2 componenti il differenziale dell'entropia è generalizzato in

   $$TdS = dE + PdV - \mu_1 dN_1 - \mu_2 dN_2.$$

   Si ottenga la temperatura T come funzione dell'energia E, a fissati V, N_1, N_2.

3. (**2 punti**) Si calcoli la pressione.

4. (**4 punti**) Si calcolino μ_1, μ_2.

Nota: si suggerisce di passare alle variabili

$$\begin{aligned} x_1 = &\quad p_{1,x}/\sqrt{2m_1},\ x_2 = p_{1,y}/\sqrt{2m_1}, \dots,\ x_{3N_1} = p_{N_1,z}/\sqrt{2m_1}, \\ x_{3N_1+1} = &\quad P_{1,x}/\sqrt{2m_2},\ x_{3N_1+2} = P_{1,y}/\sqrt{2m_2}, \dots,\ x_{3(N_1+N_2)} = P_{N_2,z}/\sqrt{2m_2}, \end{aligned}$$

così che $H = \sum_{i=1}^{3(N_1+N_2)} x_1^2$.

Esercizio 2: *Particelle in un potenziale esterno*

Si considerino N particelle classiche di massa m, non interagenti, che si muovano all'interno di un contenitore sferico di raggio R, centrato all'origine, sotto l'azione di un potenziale esterno. La particella in posizione $\mathbf{r}$, $\quad 0 \leq r \leq R$, ha energia potenziale $v(r) = U \log[(r/R)^\alpha]$, $U > 0$.

1. (**5 punti**) Si calcoli la funzione di partizione canonica di questo sistema quando $\beta U \alpha < 3$ e da questa si ricavi l'energia libera di Helmoltz A.
2. (**3 punti**) Si calcoli l'energia interna.
3. (**3 punti**) Si calcoli l'entropia.
4. (**4 punti**) Si calcoli il profilo di densità $\rho(r) = N\langle\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\rangle$ e si disegni $\rho(r)/\rho(R)$ quando $\beta U \alpha = -1$ e quando $\beta U \alpha = 1$.