Fisica Statistica. – A.A. 2011-2012, 20 Dicembre 2011

Secondo compito

(*tempo 3 ore*)

Si risolvano i due esercizi che seguono. **NOTA BENE:**

- Si diano tutti i passaggi necessari a capire in dettaglio il procedimento di soluzione. Risposte con il solo risultato o dettagli insufficienti non saranno considerate;
- se richieste, si diano le valutazioni (numeriche) con 3 cifre significative, né più né meno.

Esercizio 1 *Gas ideale di Fermioni in 1 dimensione a T=0*

Si consideri un sistema di $N = 2M$ Fermioni di massa m e spin 1/2 liberi, non interagenti, che si muovono in 1 dimensione sul segmento $[0, L]$ a $T = 0$. Si usino condizioni al contorno omogenee (o di parete dura), così che le funzioni d'onda di particella singola soddisfino $\phi(0) = \phi(L) = 0$.

1. Si dica quali siano (o si ricavino) gli stati di particella singola e le relative energie.
2. Si dica quali siano gli stati di particella singola occupati (nello stato fondamentale del sistema di N=2M particelle), ottenendo in particolare il vettore d'onda di Fermi (vettore d'onda dello stato di singola particella occupato con la più alta energia) e la relativa energia (di Fermi).
3. Si calcoli l'energia media per particella, per N, L finiti, ricordando che
$$\sum_{n=1}^{M} n^2 = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6}.$$
4. Si calcoli il potenziale chimico del sistema (per N, L finiti), ovvero la derivata dell'energia totale rispetto a N e si dica in che relazione sia con l'energia di Fermi trovata al punto 2, in particolare nel limite $N \to \infty$.

Esercizio 2 *Fononi alla Debye in un cristallo unidimensionale*

Si considerino le piccole oscillazioni degli N atomi in un cristallo unidimensionale di lunghezza L; esse possono essere descritte in termini di N oscillatori armonici indipendenti con frequenze $\omega_k = c|k|$, e $-k_D \leq k \leq k_D$. Assumeremo che le energie degli oscillatori siano date da $\hbar\omega_k \, n_k$, con $n_k = 0, 1, 2, \cdots$, ovvero che si possa trascurare il moto di punto zero.

1. Si calcoli la funzione di partizione.
2. Si calcoli l'energia (a partire dal risultato del punto precedente) e la si manipoli in modo da esprimerla (per $T \to 0$) in termini di

$$\int_0^\infty dt \, \frac{t}{e^t - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

3. Si calcoli il calore specifico a *volume* (lunghezza, di fatto, in questo caso) costante per $T \to 0$.
4. Sapendo che la densita lineare di atomi è n, si calcoli il vettore di Debye; il vettore di Debye e definito in modo che ci siano N vettori d'onda di modulo minore o uguale a k_D (in PBC). Si valuti k_D numericamente quando $1/n = L/N = 100 \mathring{A}$.

Nota: durante lo scritto sono state apportate le correzioni $\omega_k = c|k|$ (mancava il segno di valore assoluto) e $1/n = L/N = 100 \mathring{A}$ (la relazione era stata data come $n = N/L = 100 \mathring{A}$