ANISOTROPIC MASS PARTICLE IN A MAGNETIC FIELD

$\bar{H} = H\bar{\beta}$, $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\beta = 1$; $\bar{\bar{M}} \cdot \dot{\bar{v}} = \mp \frac{e\bar{v}}{c} \times \bar{H}$

Using the principal axes of the symmetric real tensor M_{ij} we get $(\sigma = \mp)$

$$m_i \dot{v}_i = \frac{\sigma e H}{c}(v_j \beta_k - v_k \beta_j) \text{ , } i = 1,2,3 \text{ and } i,j,k \text{ cyclic.}$$

For a system of 3 linear differential equations with constant coefficiets we set

$v_i = \gamma_i e^{\alpha t}$

which yields

$$\alpha m_i \gamma_i = \frac{\sigma e H}{c}(\gamma_j \beta_k - \gamma_k \beta_j)$$

and setting $\alpha = \delta \sigma e H/c$ we get

$$\delta m_i \gamma_i = \gamma_j \beta_k - \gamma_k \beta_j$$

$$\delta m_i \gamma_i - \beta_k \gamma_j + \beta_j \gamma_k = 0$$

or

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} m_1 \delta & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_3 & m_2 \delta & -\beta_1 \\ -\beta_2 & \beta_1 & m_3 \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

The determinant of the matrix must vanish:

$$m_1 m_2 m_3 \delta^3 - \cancel{\beta_1\beta_2\beta_3} + \cancel{\beta_1\beta_2\beta_3} + m_1 \delta \beta_1^2 + m_3 \delta \beta_3^2 + m_2 \delta \beta_2^2 = 0$$

$$\delta \left[m_1 m_2 m_3 \delta^2 + m_1 \beta_1^2 + m_2 \beta_2^2 + m_3 \beta_3^2 \right] = 0$$

Thus

$$\delta = 0$$
$$\delta = \pm i \left[\frac{m_1\beta_1^2 + m_2\beta_2^2 + m_3\beta_3^2}{m_1 m_2 m_3} \right]^{1/2} = \pm i \frac{1}{m_H}$$

$$\alpha = \pm i \frac{eH}{m_H c}, \quad \alpha = 0$$

$$\omega_c = \frac{eH}{m_H c}, \qquad m_H^{-1} = \left[\frac{m_1\beta_1^2 + m_2\beta_2^2 + m_3\beta_3^2}{m_1 m_2 m_3} \right]^{1/2}$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow \bar{\gamma} \propto \bar{\beta} \propto \bar{H}$$

$$\alpha = \pm i\omega_c \Rightarrow \bar{\gamma} \cdot \bar{d} = 0, \quad \bar{d} = (m_1\beta_1, m_2\beta_2, m_3\beta_3);$$

motion in a plane ortogonal to $\bar{d}$!

You are urged to calculate $\bar{\gamma}$ for each of the 3 eigenvalues: $\alpha = 0, i\omega_c, -i\omega_c$. Do it at least for the case $\beta_1\beta_2\beta_3 \neq 0$. For each of the 3 eigenvalues α, the eigenvector is obtained by substituting α in the linear system (1) and discarding one of the 3 equation, as they are linearly dependent.

Exercise: *One-dimensional linear chain with interactions beyond the nearest neighbours.*

Consider the oscillations of a linear atomic chain, with interatomic distance a and mass M, when *harmonic* interactions beyond the nearest neighbours are present.

1. Write the potential energy of the chain with $u(na)$ the displacement from equilibrium position na of the n-th atom and C_m the force constant of order m, $m \geq 1$.
   Recall that the interaction energy between the n-th atom and its m-th neighbour is è $(1/2)C_m \left[u(na) - u[(n+m)a]\right]^2$.

2. Obtain the force acting on the l-th atom.

3. Obtain the condition under which a solution of the type $e^{i(qal-\omega t)}$ satisfies the equations of motions, i.e., obtain the dispersion relation for the frequency, $\omega(q)$.

4. Expand the dispersion relation for small values of q to obtain an expression for the sound velocity. Which is the condition that the C_m must satisfy in order to obtain a finite sound velocity?

5. Consider now and only now $C_m = C/m^p$ con $1 < p < 3$: what is the value of the sound velocity with such a choice of C_m?

6. With the C_m as in the previous point rather than expanding in q obtain the behaviour of $\omega(q)$ for q small by approximating the m sum in the dispersion relation with an integral [the approximation becomes exact in the limit $q \to 0$].

Exercise: *Magnetismo alla Stoner nel gas d'elettroni*

Si considerino degli elettroni in 3 dimensioni con un'interazione di contatto repulsiva $v(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = (V_0/n)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, con $n = N/V$ e $V_0 \geq 0$. Si scelga una funzione d'onda nella quale N_+ elettroni hanno proiezione di spin positiva e N_- negativa, $N = N_+ + N_-$; per ciascuna proiezione di spin vengono occupate le onde piane ad energia più bassa. Si puo mostrare che il valor medio del termine di potenziale su tale funzione d'onda contribuisce all'energia totale un termine $N(V_0/4)(1 - \zeta^2)$, ove la polarizzazioen di spin è definita da $\zeta = (N_+ - N_-)/N$.

1. Si dia l'espressione dell'energia cinetica t per elettrone sulla funzione d'onda scelta.
2. Si esprima t come funzione di n e ζ
3. Si scriva l'energia totale per particella (come funzione di n e ζ) ove gli elettroni siano immersi in un debole campo magnetico B: la si denoti come $e(n, \zeta, B)$. Essa è evidentemenete somma del termine cinetico, termine di repulsione e interazione dello spin con il campo magnetico
4. Assumendo che per campi B piccoli la polarizzazione ζ indotta sia piccola si sviluppi $e(n, \zeta, B)$ in potenze di ζ fino al secondo ordine incluso.
5. Minimizzando l'espressione di $e(n, \zeta, B)$ trovata al punto precedente rispetto a ζ a fissati n e B, si trovi la polarizzazione d'equilibrio $\zeta(n, B)$.
6. Si ricavi un'espressione della suscettività di spin $\chi_s = d\zeta/dB$ e si dica cosa succede a χ_s al decrescere della densità n, partendo da densità grandi.

Exercise: *Antiferromagnete di spin 1/2 in campo medio.*

Si consideri un reticolo a corpo centrato (BCC) con i siti occupati da particelle con spin 1/2. Le proprietà magnetiche del sistema possonono essere descritte da una Hamiltoniana di Heisenberg a primi vicini con interazione di scambio negativa $J = -|J| = -K_B T_N$. Osserviamo che il BCC può essere visto come due reticoli cubici semplici (SC) compenetrantisi, che denoteremo con A e B. Evidentemente se il campione ha volume V e un numero di siti N, con densità $\rho = N/V$, ciascun sottoreticolo ha un numero di siti $N/2 = N_A = N_B$.]

1. Si scriva l'Hamiltoniana H, quando il sistema sia immerso in un campo magnetico h.

2. Si consideri prima l'approssimazione di spin indipendenti [$J = 0$] e sia dia l'espressione della magnetizzazione media a data temperatura T, esplicitando la funzione di Brillouin $B_{1/2}(x)$ per il caso in esame. Si esprima in particolare $B_{1/2}(x)$ in termini di una singola funziona iperbolica, ad esempio utilizzando formule di bisezione o con il calcolo esplicito.

3. Si consideri ora, per $J < 0$, la possibilità che i due reticoli cubici semplici (SC) che costituisco il BCC abbiano delle magnetizzazioni medie diverse M_A e M_B. Nell'ipotesi che tutti i siti di un sottoreticolo siano equivalenti in media, si scriva il campo magnetico effettivo $\tilde{h}_A$ al generico sito A; si faccia lo stesso per il campo $\tilde{h}_B$ al generico sito B. [A questo scopo si sfrutti esplicitamente il fatto che l'interazione è a primi vicini e si approssimi lo spin ai siti (primi) vicini in termini della magnetizzazione media del sottoreticolo al quale appartengono (approssimazione di campo medio).]

4. Utilizzando le espressioni ottenute ai punti precedenti si scrivano le magnetizzazioni medie M_A e M_B in termini dei campi effettivi $\tilde{h}_A$ e $\tilde{h}_B$, ovvero in termini di h, M_A e M_B.

5. Specializzando la coppia di relazioni ottenuta al punto precedente al caso $h = 0$, si trovi qual è la temperatura T_c sotto la quale si sviluppa un ordine spontaneo [$M_A \neq 0$ e $M_B \neq 0$, ma $M_A \neq M_B$!].

6. Si calcoli la suscettività magnetica per $T > T_c$ e si dica in cosa differisce da quella di un ferromagnete.

7. **Domanda facoltativa: dà punti addizionali**.
   Sfruttando lo sviluppo di $B_{1/2}(x)$ per piccoli x si ottenga la l'andamento dominante di M_A e M_B per $0 < (T_c - T)/T_c \ll 1$.