MISURE DI RISCHIO E COERENZA

Renato Pelessoni
E-mail: renato.pelessoni@econ.univ.trieste.it

Dipartimento di Matematica Applicata 'Bruno de Finetti'
Università di Trieste

ABSTRACT - In questa nota vengono illustrati alcuni concetti fondamentali relativi alla teoria delle misure di rischio coerenti ed ai suoi legami con la teoria delle previsioni imprecise. Vengono in particolare discussi la generalizzazione del concetto di misura di rischio coerente ad insiemi arbitrari (privi di struttura) di numeri aleatori limitati ed il concetto di misura di rischio che evita la perdita certa. Sono inoltre esaminate alcune condizioni sufficienti a garantire la consistenza del VaR ed i problemi di correzione ed estensione di una misura di rischio.

KEYWORDS - misura di rischio coerente, previsione imprecisa, condizione avoiding sure loss, VaR.

1 Introduzione

Nell'ambito della finanza matematica ha recentemente riscosso un crescente interesse la ricerca di metodi e lo sviluppo di ambienti teorici per la valutazione del rischio connesso a posizioni finanziarie. In tale contesto ha assunto grande rilievo la nozione di *misura di rischio coerente*, introdotta da P. Artzner, F. Delbaen, S. Eber e D. Heath in un gruppo di articoli [1, 2, 4] nei quali gli autori hanno delineato alcuni requisiti fondamentali che, a loro giudizio, ogni ragionevole misura di rischio dovrebbe soddisfare.

In questa nota, dopo aver ricordato tale nozione ed averne illustrato alcune caratteristiche fondamentali nella Sezione 2, ne viene evidenziato, nella Sezione 3, lo stretto collegamento con la teoria delle previsioni imprecise, seguendo la linea introdotta in [11].

In tale ambito vengono così illustrati alcuni problemi rilevanti per la teoria delle misure di rischio coerenti, quali la possibilità di definire una nozione di consistenza più debole della coerenza ma che esprime un importante requisito di razionalità e la generalizzazione della nozione di coerenza a spazi di numeri aleatori limitati privi di struttura.

Nella Sezione 4 sono poi riportate alcune condizioni sufficienti a garantire la consistenza del VaR ed infine, nella Sezione 5, vengono brevemente affrontati il problema della correzione di una misura di rischio non coerente e dell'estensione di una misura di rischio coerente.

2 Misure di rischio coerenti

La nozione di misura di rischio ha origine dalla necessità di esprimere quale sia il grado di rischiosità dei numeri aleatori appartenenti ad un insieme $\mathcal{D}$, ognuno dei quali rappresenta il valore che assumerà una certa posizione (*rischio*) in un istante futuro $t = T$. Da un punto di vista molto generale quindi, una misura di rischio può essere definita come un'applicazione dall'insieme $\mathcal{D}$ in $I\!R$.

Sovente la valutazione di un rischio viene effettuata da un'autorità indipendente o da una sorta di supervisore che, pur non gestendo direttamente le posizioni, ha l'autorità e la responsabilità di decidere se tali posizioni possono essere assunte o meno (ad esempio un'autorità deputata al controllo delle compagnie assicurative o una società che debba valutare rischi assunti da società controllate). Inoltre, poiché usualmente vi è un gap temporale tra l'istante in cui una tale valutazione di rischio viene effettuata ($t = 0$) e l'istante ($t = T$) in cui tali posizioni vengono regolate, è usuale assumere l'esistenza sul mercato di uno strumento di riferimento che, per ogni unità monetaria investita in $t = 0$, produca l'ammontare certo $r > 0$ in $t = T$. Dal punto di vista operativo quindi una misura di rischio $\rho(X)$ potrà assumere il significato, se $\rho(X) > 0$, di minimo ammontare che è necessario aggiungere alla posizione X, in $t = 0$, ed investire in tale strumento, per rendere tale posizione accettabile al supervisore. Analogamente, se $\rho(X) < 0$, $-\rho(X)$ rappresenterà il massimo ammontare che è possibile togliere ad X mantenendo la posizione accettabile.

Naturalmente, perché una misura di rischio assuma un concreto significato operativo, è necessario che soddisfi alcuni requisiti fondamentali di consistenza. In [2] tale necessità ha portato all'introduzione degli assiomi di coerenza per una misura di rischio, riportati nella definizione che segue. Si indichi con $I\!P$ una partizione finita dell'evento certo.

Definizione 1 *Sia $\mathcal{L}$ lo spazio lineare di tutti i numeri aleatori definiti su $I\!P$. Un'applicazione ρ da $\mathcal{L}$ in $I\!R$ è una* misura coerente di rischio *se e soltanto se soddisfa i seguenti assiomi:*

T) $\forall\, X \in \mathcal{L}$, $\forall\, \alpha \in I\!R$, $\rho(X + \alpha r) = \rho(X) - \alpha$ *(invarianza per traslazioni)*

PH) $\forall\, X \in \mathcal{L}$, $\forall\, \lambda \geq 0$, $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ *(positiva omogeneità)*

M) $\forall\, X, Y \in \mathcal{L}$, *se* $X \leq Y$ *allora* $\rho(Y) \leq \rho(X)$ *(monotonia)*

S) $\forall\, X, Y \in \mathcal{L}$, $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ *(subadditività).*

Di ognuno dei precedenti assiomi può essere data una ragionevole interpretazione. Ad esempio, assumendo che i valori positivi dei numeri aleatori rappresentanti i rischi indichino dei guadagni, la necessità della monotonia appare evidente. Per quanto riguarda la subadditività, se esistessero due rischi X ed Y per i quali tale condizione non fosse soddisfatta, un'azienda o un individuo che volessero assumersi il rischio $X+Y$ potrebbero trovare più conveniente assumere separatamente i due rischi stessi, ad esempio attraverso due società controllate separate o attraverso due conti distinti, rispettando comunque gli obblighi imposti da un eventuale supervisore. L'assioma di invarianza per traslazioni implica che $\rho(X + r\rho(X)) = 0$. In tal modo, investendo $\rho(X)$ nello strumento di riferimento ed aggiungendolo alla posizione iniziale X si ottiene una posizione a rischio nullo, coerentemente con l'interpretazione operativa di ρ. L'assioma di omogeneità è stato giustificato in [2] con esigenze legate alla liquidità di una posizione, percui, essendo la posizione λX generalmente meno liquida di X, appare ragionevole che la rischiosità dell'assumere la posizione λX non sia inferiore a quella relativa a λ posizioni X assunte singolarmente, cosicché $\lambda\rho(X) \leq \rho(\lambda X)$ (la diseguaglianza inversa è imposta dalla subadditività). Quest'ultimo assioma è stato tuttavia giudicato da più autori il più critico. È stata quindi introdotta la famiglia delle misure di rischio convesse [6, 7], a cui si accenna nella Sezione 3.

In [2] viene evidenziato come una misura di rischio coerente possa essere interpretata anche in termini di *insieme di rischi accettabili.* Data una misura di rischio ρ, si definisca tale insieme come $\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{L} : \rho(X) \leq 0\}$. Viceversa, dato un insieme $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$, ad esso può venire associata la misura di rischio $\rho_\mathcal{A}(X) = \inf\{t : tr+X \in \mathcal{A}\}$. Il legame tra le due nozioni è espresso dalla seguente proposizione [2].

Proposizione 1 *Sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ un insieme di rischi che soddisfa i seguenti assiomi:*

1) $\forall X \in \mathcal{L} : X \geq 0,\ X \in \mathcal{A}$

2) $\forall X \in \mathcal{L} : X < 0,\ X \notin \mathcal{A}$

3) $\mathcal{A}$ è un cono convesso positivamente omogeneo

Allora $\rho_\mathcal{A}$ è una misura di rischio coerente e si ha $\mathcal{A}_{\rho_\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}$ [1]. Viceversa, se ρ è una misura di rischio coerente su $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}_\rho$ è chiuso e soddisfa i precedenti assiomi ed inoltre si ha $\rho_{\mathcal{A}_\rho} = \rho$.

Dal punto di vista della misurazione del rischio quindi, la precedente proposizione prova che la nozione di coerenza e quella di insieme di rischi accettabili sono sostanzialmente la stessa cosa. Un supervisore potrebbe eventualmente trovare più conveniente definire in primo luogo $\mathcal{A}$ e da esso ricavare la corrispondente misura, rimanendo nell'ambito della teoria.

[1] $\overline{\mathcal{A}}$ denota la chiusura di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}$. Si osservi che, poiché $I\!P$ è finita, indicando con n la sua cardinalità, è possibile identificare $\mathcal{L}$ con $I\!R^n$.

3 Misure di rischio e previsioni imprecise

In letteratura sono ormai numerosi i lavori in cui teorie dell'incertezza, diverse dalla teoria classica delle probabilità, sono state applicate a problemi di decisionali [5, 8, 13, 18]. Tra queste teorie figura la teoria delle previsioni imprecise, il cui testo fondamentale di riferimento è [15] ma per la quale è doveroso citare anche il lavoro di Williams [17]. Essa costituisce una generalizzazione della teoria delle previsioni precise di de Finetti [3] e risulta essere estremamente generale, comprendendo al suo interno altre teorie dell'incertezza come casi particolari. In [11] viene provato come la teoria delle previsioni imprecise possa essere applicata alla misurazione del rischio e ne viene evidenziata la stretta relazione esistente con la teoria delle misure di rischio coerenti.

In [11] gli autori partono dalla considerazione che un individuo, che desideri dare una valutazione del rischio $\rho(X)$ associato ad un numero aleatorio X, può identificare tale valutazione con l'estremo inferiore della somma che egli richiederebbe, all'istante $t = 0$, per accollarsi tale rischio all'istante $t = T$. Chiaramente, tale misura sarà tanto più grande quanto più X è rischioso. Poiché acquisire X corrisponde a vendere $-X$, $\rho(X)$ può essere identificata, dal punto di vista comportamentale, come l'estremo inferiore dei prezzi di vendita, in $t = 0$, del numero aleatorio $-X$. Si ottiene in questo modo l'interpretazione comportamentale per le previsioni imprecise superiori nota in letteratura [15]. Considerando inoltre la necessità di attualizzare in $t = 0$ il valore di $-X$ in $t = T$, si ottiene la relazione

$$\rho(X) = \overline{P}(-X/r) \tag{1}$$

dove $\overline{P}$ indica una previsione imprecisa superiore. La misura di rischio $\rho(X)$ può essere così interpretata come l'estremo inferiore dei prezzi μ tali che il numero aleatorio $\mu + X/r$ sia desiderabile per l'individuo, tali cioè che l'individuo sia disposto ad assumere (in $t = 0$) il rischio X/r (cioè il valore attuale in $t = 0$ del rischio X al tasso di mercato) in cambio di μ.

In virtù della relazione (1) in [11] è stata proposta l'applicazione alle misure di rischio di due definizioni di consistenza per previsioni imprecise [15].

Definizione 2 *Dato un arbitrario insieme $\mathcal{D}$ di numeri aleatori limitati, ρ da $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}$ è una misura di rischio su $\mathcal{D}$ che* evita la perdita certa (avoiding sure loss - ASL) *se e soltanto se, per tutti gli $n \in \mathbf{N}$, per ogni $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{D}$, per ogni $s_1, \ldots, s_n$ non negativi, posto $\overline{G} = \sum_{i=1}^{n} s_i(\rho(X_i) + X_i/r)$, si ha $\sup \overline{G} \geq 0$.*

Si noti che qualora la condizione $\sup \overline{G} \geq 0$ della precedente definizione non fosse soddisfatta, esisterebbero $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{D}$, $\lambda_1, \ldots \lambda_n \geq 0$ ed un $\epsilon > 0$ tale che $\sup \sum_{i=1}^{n} s_i(\rho(X_i) + \epsilon + X_i/r) < 0$. L'individuo sarebbe quindi disposto ad assumere i rischi $X_1, \ldots, X_n$ ricevendo in cambio le quantità $\rho(X_i)+\epsilon > \rho(X_i)$, nonostante una combinazione lineare a coefficienti non negativi delle quantità desiderabili $X_i/r + \rho(X_i) + \epsilon$ risulti uniformemente negativa. La condizione della Definizione 2 denota quindi un criterio di razionalità di base e dal punto di vista decisionale ha infatti, nell'ambito della corrispondente teoria delle previsioni imprecise, una rilevanza fondamentale.

La condizione ASL può essere caratterizzata tramite la nozione di dominanza. Si ponga $\mathcal{D}^* = \{-X/r : X \in \mathcal{D}\}$ e si indichi con $\mathcal{M}(\rho)$ l'insieme delle previsioni precise coerenti P su $\mathcal{D}^*$ tali che $P(-X/r) \leq \rho(X)\ \forall X \in \mathcal{D}$. Vale allora il teorema seguente [15].

Teorema 1 *Una misura di rischio ρ definita su un arbitrario insieme $\mathcal{D}$ di numeri aleatori limitati evita la perdita certa se e soltanto se $\mathcal{M}(\rho) \neq \emptyset$.*

La condizione ASL può tuttavia risultare per alcuni aspetti troppo debole. Ad esempio essa non è in generale incompatibile con la relazione $\rho(X) > -\inf(X/r)$ (cf. in seguito). La definizione di consistenza che segue [11], più forte della condizione ASL, elimina la maggior parte delle caratteristiche insoddisfacenti di quest'ultima, ammettendo che l'individuo possa essere obbligato (se $s_0 \neq 0$) a cedere uno dei rischi al prezzo $\rho(X_0)$.

Definizione 3 *Dato un arbitrario insieme $\mathcal{D}$ di numeri aleatori limitati, ρ da $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}$ è una* misura di rischio coerente *su $\mathcal{D}$ se e soltanto se, per tutti gli $n \in \mathbf{N}$, per ogni $X_0, X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{D}$, per ogni $s_0, s_1, \ldots, s_n$ reali e non negativi, posto $\overline{G} = \sum_{i=1}^{n} s_i(\rho(X_i) + X_i/r) - s_0(\rho(X_0) + X_0/r)$, si ha $\sup \overline{G} \geq 0$.*

In [11] è provato che la Definizione 3 è equivalente alla Definizione 1 qualora l'insieme $\mathcal{D}$ coincida con $\mathcal{L}$, lo spazio lineare di tutti i numeri aleatori definiti su una assegnata partizione finita. La Definizione 3 costituisce quindi una generalizzazione della definizione originaria di misura coerente di rischio data in [2]. Essendo fondata, tramite la relazione (1), sulla nozione di previsione superiore, consente di applicare alle misure di rischio note proprietà della teoria delle previsioni imprecise, ottenendo alcune generalizzazioni di risultati noti in letteratura. Per mezzo della relazione (1) le misure di rischio vengono inoltre a godere delle caratteristiche di flessibilità e generalità che caratterizzano le previsioni imprecise. A questo proposito si osservi che:

1) L'assegnazione di una misura di rischio $\rho(X)$ non richiede alcuna precedente assegnazione di una distribuzione di probabilità su X.

2) La Definizione 3 è valida su insiemi di numeri aleatori (limitati) del tutto arbitrari e quindi può essere applicata in situazioni molto generali.

3) Data una misura di rischio coerente ρ definita su un generico insieme $\mathcal{D}$ ed un suo soprainsieme di numeri aleatori $\mathcal{D}'$, esiste sempre una misura di rischio ρ' coerente su $\mathcal{D}'$ che coincide con ρ su $\mathcal{D}$.

4) Data una misura di rischio ρ definita su $\mathcal{D}$ che eviti la perdita certa, esiste sempre una sua correzione canonica coerente ρ' definita su $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$, tale cioè che ρ' è coerente su $\mathcal{D}'$, $\rho' \leq \rho$ su $\mathcal{D}$ e per ogni altra misura $\overline{\rho}$ coerente su $\mathcal{D}$ tale che $\overline{\rho} \leq \rho$ si ha $\overline{\rho} \leq \rho'$ (cf. la Sezione 5).

Nel caso in cui l'insieme $\mathcal{D}$ non sia strutturato non sembra possibile definire la coerenza di previsioni imprecise, e quindi di misure di rischio coerenti, attraverso un semplice sistema di assiomi, come quelli della Definizione 1 (cf. [15] Sezione 2.7). In particolare, benché necessari per la coerenza, quest'ultimi non sono in generale sufficienti a garantire la coerenza di una misura di rischio su un insieme arbitrario di numeri aleatori $\mathcal{D}$. Come semplice esempio, si consideri $\mathcal{D} = \{X\}$ ed una misura di rischio ρ su $\mathcal{D}$ tale che $\rho(X) > -\inf X/r$. Ovviamente tutti gli assiomi della Definizione 1 sono banalmente soddisfatti, ma tale misura non è coerente secondo la Definizione 3, come è facile verificare ponendo $n = 0$, $s_0 = 1$, $X_0 = X$. Sarebbe peraltro poco ragionevole considerare consistente una tale misura, che, ricordando l'interpretazione operativa delle misure di rischio, impone di investire nello strumento di riferimento e di aggiungere ad X un ammontare superiore alla massima perdita che esso può causare o parimenti, secondo l'interpretazione comportamentale, indicherebbe che per assumere il rischio X si ritiene necessario richiedere una somma superiore a tale massima perdita.

Tra le altre proprietà delle misure di rischio coerenti note in letteratura che è possibile generalizzare attraverso la relazione (1) vi è la rappresentabilità tramite "scenari", cioè come inviluppo superiore di previsioni precise coerenti. Tale risultato, già presente in [2], dove tuttavia gli scenari sono individuati da valori attesi, che sono com'è noto particolari previsioni coerenti, rimane valido anche in assenza di struttura per l'insieme $\mathcal{D}$.

Teorema 2 ***(Teorema dell'inviluppo superiore)*** *Una misura di rischio ρ definita su un generico insieme $\mathcal{D}$ di numeri aleatori limitati è coerente se e soltanto se*

$$\rho(X) = \sup\{P(-X/r) : P \in \mathcal{P}\} \tag{2}$$

dove $\mathcal{P}$ $(\neq \emptyset)$ è un insieme di previsioni precise coerenti su $\mathcal{D}^* = \{-X/r : X \in \mathcal{D}\}$.

Come osservato in [11], il Teorema 2 costituisce il fondamento teorico per una procedura di costruzione di misure di rischio. Le previsioni precise sull'insieme $\mathcal{D}^*$ potrebbero infatti essere assegnate da un gruppo di esperti e una misura di rischio coerente può essere ottenuta da queste tramite la (2). In tale ipotesi risulta quindi importante garantire che le previsioni degli esperti siano effettivamente coerenti, condizione questa che per previsioni precise può essere verificata in molti casi. Ad esempio, quando $\mathcal{D}$ è un insieme finito di numeri aleatori semplici, la verifica si riduce alla risoluzione di un problema di programmazione lineare [3]. Un esempio concreto di utilizzo del teorema di inviluppo è presentato in [2], dove è provato che lo SPAN, un metodo di misurazione del rischio di mercato proposto dal Chicago Mercantile Exchange, è basato sull'utilizzo di scenari. Per un altro esempio di uso di scenari si veda [14].

Tra gli altri risultati, si può citare a titolo d'esempio la possibilità di ottenere un'altra versione della corrispondenza tra misure di rischio coerenti ed insiemi di rischi accettabili di cui alla Proposizione 1. Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale di numeri aleatori limitati e, in modo analogo alla Sezione 2, per un'assegnata misura di rischio

ρ si ponga $\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{V} : \rho(X) \leq 0\}$ e, dato $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$, si indichi $\rho_{\mathcal{A}}(X) = \min\{t : tr + X \in \mathcal{A}\}$.

Proposizione 2 *Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale di numeri aleatori limitati contenente le costanti e sia $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$. Se $\mathcal{A}$ soddisfa i seguenti assiomi:*

1) $\forall X \in \mathcal{A}$, $\sup X \geq 0$

2) $\forall X \in \mathcal{V} : \inf X > 0$, $X \in \mathcal{A}$

3) $\forall X \in \mathcal{A}$, $\forall \lambda > 0$, $\lambda X \in \mathcal{A}$

4) $\forall X, Y \in \mathcal{A}$, $X + Y \in \mathcal{A}$

5) $\forall X \in \mathcal{V} : X + \delta \in \mathcal{A}\ \forall \delta > 0$, $X \in \mathcal{A}$

allora $\rho_{\mathcal{A}}$ è una misura di rischio coerente su $\mathcal{V}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\rho$. Viceversa, se ρ è una misura di rischio coerente su $\mathcal{V}$, $\mathcal{A}_\rho$ soddisfa i precedenti assiomi e si ha $\rho_{\mathcal{A}_\rho} = \rho$.

Si noti che, a differenza della Proposizione 1, l'introduzione di un assioma di chiusura (il quinto) permette di ottenere nella Proposizione 2 una corrispondenza esatta tra gli insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_\rho$. Un'analisi più approfondita dell'argomento e modelli equivalenti di coerenza espressi attraverso relazioni d'ordine si possono reperire in [9, 15].

Benché più debole della coerenza, la condizione ASL è tuttavia importante. Essa infatti, oltre a costituire un requisito fondamentale di razionalità, risulta in generale più facile da verificare. Inoltre, come accennato precedentemente, ogni misura di rischio che eviti la perdita certa può essere corretta in modo canonico. Come osservato in [11], alcune misure di rischio note in letteratura, benchè non coerenti, tuttavia evitano la perdita certa. La Sezione 4, nella quale si discute la consistenza del VaR, presenterà alcune condizioni che garantiscono che tale importante misura soddisfi perlomeno tale nozione di consistenza debole. Un'altra misura, menzionata in [2], che evita la perdita certa è il *"mittleres Risiko"* ρ_{MR}, che può essere definito ponendo, per ogni $X \in \mathcal{D}$, $\rho_{MR}(X) = P(X^-)$, dove $X^- = \max\{-X, 0\}$ e P è una previsione precisa coerente (si assume $r = 1$). Essendo $X^- \geq -X$, ne consegue che $P(X^-) \geq P(-X)$ e quindi ρ_{MR} evita la perdita certa per il Teorema 1.

Le misure convesse, recentemente introdotte in letteratura [6, 7], costituiscono un'altra importante famiglia di misure di rischio. Esse sono definite sostituendo nella Definizione 1 gli assiomi $S)$ e $PH)$ con l'assioma di convessità

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)\ \forall X, Y \in \mathcal{L}, \forall\lambda \in [0, 1]. \tag{3}$$

È possibile verificare [12] che una misura di rischio convessa evita la perdita certa se e soltanto se $\rho(0) \geq 0$. Poiché la condizione $\rho(0) = 0$ appare necessaria per ogni ragionevole misura di rischio, si può quindi affermare che anche le misure convesse sostanzialmente evitano la perdita certa.

4 Consistenza del VaR

Molte misure di rischio comunemente impiegate non sono coerenti. Tra queste la più popolare è forse il VaR. In seguito si farà riferimento alla definizione data in [2]:

$$VaR_\alpha(X) = -\inf\{x : P(X/r \leq x) > \alpha\} \tag{4}$$

in cui P indica una distribuzione di probabilità sul numero aleatorio X ed $\alpha \in (0,1)$.

In [2] è provato che il VaR non è di per sè coerente, non essendo necessariamente subadditivo. Ciò non toglie tuttavia che il VaR possa evitare la perdita certa o perfino essere coerente secondo la Definizione 3. Ovviamente, questo è banalmente vero quando α è così piccolo che $VaR_\alpha(X) = -\inf X/r$. Alcune condizioni generali sufficienti a garantire la coerenza del VaR sono date in [11]. Da esse si possono ricavare le condizioni riportate nel seguito, meno generali ma di interpretazione più immediata.

Proposizione 3 *Sia $\mathbb{P} = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ una partizione finita, $p_i = P(\omega_i)$ e sia $\mathcal{D}$ un insieme di numeri aleatori definiti su $\mathbb{P}$. Se $\alpha < \max\{p_i : i = 1, \ldots, n\}$, VaR_α evita la perdita certa su $\mathcal{D}$.*

Mentre la precedente proposizione fa dipendere il valore di α dalla distribuzione di probabilità sulla partizione $\mathbb{P}$, la seguente, suo corollario immediato, fornisce una condizione sufficiente a garantire che VaR_α eviti la perdita certa, indipendentemente dalla distribuzione di probabilità assegnata su $\mathbb{P}$.

Proposizione 4 *Sia $\mathbb{P}$ una partizione finita di cardinalità n e $\mathcal{D}$ un insieme di numeri aleatori definiti su $\mathbb{P}$. Se $\alpha < 1/n$, VaR_α evita la perdita certa su $\mathcal{D}$.*

Una semplice condizione che garantisce che VaR_α sia coerente consiste nel verificare se l'evento composto da tutti gli eventi elementari la cui probabilità non supera α a sua volta ha probabilità minore o al più uguale ad α.

Proposizione 5 *Sia $\mathbb{P} = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ una partizione finita, $p_i = P(\omega_i)$ e sia $\mathcal{D}$ un insieme di numeri aleatori definiti su $\mathbb{P}$. Se VaR_α evita la perdita certa e, posto $J = \{j : p_j \leq \alpha\}$, si ha $\alpha \geq \sum_{j \in J} p_j$, VaR_α è coerente su $\mathcal{D}$.*

Si noti che le precedenti proposizioni non richiedono alcuna ipotesi sull'insieme di numeri aleatori semplici $\mathcal{D}$, che può quindi avere o meno la struttura di spazio vettoriale richiesta dalla Definizione 1.

5 Estensione e correzione di una misura di rischio

Nella Sezione 4 si sono viste alcune condizioni che garantiscono che VaR_α sia consistente, purché α sia scelto sufficientemente piccolo. Poiché tuttavia α è fissato generalmente a priori, non sempre è possibile garantirsi per mezzo di queste la consistenza del VaR. Assume quindi rilevanza il problema di correggere il VaR, od una generica misura di rischio, qualora questi non siano coerenti, cioè di determinare una misura di rischio coerente definita sullo stesso insieme di numeri aleatori "vicina" alla misura di rischio originaria. Questo problema è stato parzialmente esaminato in [2], dove viene illustrata una tecnica che consente, data una certa assegnazione di misura di rischio su un insieme di numeri aleatori preassegnati, di correggere ed estendere tale assegnazione in modo canonico. In [11] è provato che tale tecnica coincide con la costruzione di una nuova misura di rischio ottenuta applicando la relazione (1) all'*estensione naturale* [15] della previsione superiore corrispondente alla misura di rischio iniziale.

Più precisamente, data una misura di rischio ρ su un insieme $\mathcal{D}$ e dato un insieme di numeri aleatori limitati $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$, è possibile, $\forall X \in \mathcal{D}'$, costruire la misura di rischio

$$\rho_E(X) = \inf\Big\{\alpha \in I\!R : \alpha r + X \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(r\rho(X_i) + X_i), \\ \text{per qualche } n \geq 0, X_i \in \mathcal{D}, \lambda_i \geq 0\Big\}$$

che gode delle seguenti proprietà:

a) ρ_E è una misura di rischio coerente su $\mathcal{D}'$;

b) $\rho_E(X) \leq \rho(X)$, $\forall X \in \mathcal{D}$;

c) se ρ^* è una misura di rischio coerente su $\mathcal{D}'$ tale che $\rho^*(X) \leq \rho(X)$, $\forall\, X \in \mathcal{D}$, allora $\rho^*(X) \leq \rho_E(X)$, $\forall\, X \in \mathcal{D}'$;

d) ρ è coerente se e soltanto se $\rho_E = \rho$ su $\mathcal{D}$;

e) ρ evita la perdita certa se e soltanto se ρ_E è finita.

La proprietà b) consente di affermare che la misura di rischio ρ_E è meno prudenziale della misura di rischio originaria ρ, mentre dalla proprietà c) si può concludere che tra tutte le misure di rischio coerenti meno prudenziali di ρ, la misura ρ_E risulta la più prudenziale.

Per quanto riguarda la possibilità di costruire effettivamente la ρ_E a partire da un'assegnata misura di rischio, nel caso in cui l'insieme $\mathcal{D}$ sia un insieme finito di numeri aleatori semplici il problema si riduce in pratica alla risoluzione di problemi di programmazione lineare [10, 16].

La ρ_E non risolve tuttavia definitivamente il problema della correzione di una misura di rischio incoerente ρ, sia perché il suo impiego comunque richiede che ρ eviti a priori la perdita certa (proprietà e)), sia perché, come osservato in [2], potrebbe essere richiesto che la sua correzione ρ' soddisfi alcuni ulteriori vincoli. Ad esempio potrebbe essere richiesto che ρ' sia non meno prudenziale di ρ, cioè che sia soddisfatto il vincolo $\rho' \geq \rho$. Quest'ultimo impedirebbe quindi l'uso della ρ_E poiché questa opera una correzione dal basso, come evidenziato dalla proprietà b).

Bibliografia

[1] P. Artzner, "Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance", *North American Actuarial Journal* **3** (1999) 11–26.

[2] P. Artzner, F. Delbaen, S. Eber, D. Heath, "Coherent measures of risk", *Mathematical Finance* **9** (1999) 203–228.

[3] B. de Finetti, *Theory of Probability, vol.1* (Wiley, London, 1974).

[4] F. Delbaen, "Coherent risk measures on general probability spaces", disponibile presso http://www.math.ethz.ch/∼delbaen, 2000.

[5] K. J. Engemann, H. E. Miller, R. R. Yager, "Decision making with belief structures: an application in risk management", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* **4** (1996) 1–25.

[6] H. Föllmer, A. Schied, "Convex measures of risk and trading constraints", disponibile presso http://wws.mathematik.hu-berlin.de/ foellmer/publications.eng.html, 2002.

[7] M. Frittelli, E. R. Gianin, "Putting order in risk measures", *Proceedings of the XXX Meeting of the EWGFM*, Capri, May 2002.

[8] J. Y. Jaffray, "Rational decision making with imprecise probabilities", *Proc. ISIPTA'99*, Gent, June 1999, pp. 183–188.

[9] S. Jaschke, U. Küchler, "Coherent risk measures and good-deal bounds", *Finance and Stochastics* **5** (2001) 181–200.

[10] R. Pelessoni, P. Vicig, "A consistency problem for imprecise conditional probability assessments", *Proc. IPMU'98*, Paris, July 1998, pp. 1478–1485.

[11] R. Pelessoni, P. Vicig, "Coherent risk measures and imprecise previsions", *Proc. ISIPTA'01*, Ithaca, NY, June 2001, pp. 307–315.

[12] R. Pelessoni, P. Vicig, "Risk measurement and imprecise previsions", in preparazione.

[13] D. Schmeidler, "Subjective probability and expected utility without additivity", *Econometrica* **57** (1989) 571–587.

[14] T. K. Siu, H. Tong, H. Yang, "Bayesian risk measures for derivatives via random Esscher transform", *North American Actuarial Journal* **5** (2001) 78–91.

[15] P. Walley, *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities* (Chapman and Hall, London, 1991).

[16] P. Walley, “Measures of uncertainty in expert systems”, *Artificial Intelligence* **83** (1996) 1–58.

[17] P. M. Williams, “Notes on conditional previsions”, Research Report, School of Math. and Phys. Science, University of Sussex, 1975.

[18] R. R. Yager, “Decision making under Dempster-Shafer uncertainties”, *International Journal of General Systems* **20** (1992) 233–245.