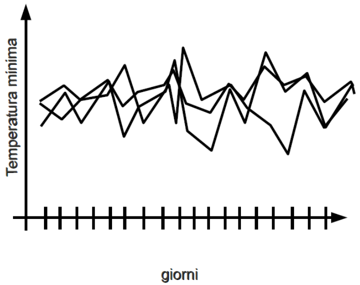
Processi di Markov

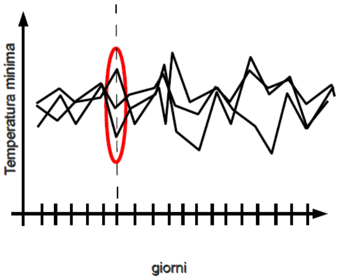
Processi Stocastici

Un **Processo Stocastico a tempo discreto** é una successione di variabili aleatorie $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ dove il pedice ha normalmente il significato di tempo.
Ad esempio: tre realizzazioni della temperatura minima in un certo luogo in un certo anno nel giorno n:



Processi Stocastici

In un certo istante temporale la variabile aleatoria assume diversi valori in un sottoinsieme di valori:



Processi Stocastici. Definizioni:

- insieme dei tempi: $T = \{0; 1; 2; \dots\} = N$;
- insieme dei possibili valori assunti dalla VA: $X = \{x_1; x_2; \dots x_n\}$;
- realizzazione $x(.)$ del processo: é il valore assunto al tempo $t \in T$ dal processo durante una particolare evoluzione;
- probabilitá che si verifichi l'evento x_i al tempo $t \in T$: $\pi_i(t) = Pr\{x(t) = x_i\}$;
- media della generica variabile aleatoria $(X; \pi(t))$ per $t \in T$:

$$\mu_{X(t)} = E[(X; \pi(t))] = \sum_1^n x_i \pi_i(t)$$

- media temporale associata ad una generica realizzazione $x(.)$ al tempo $t \in T$:

$$\hat{\mu}_{x(.)}(t) = \frac{1}{t+1} \sum_{k=0}^{t} x_k$$

Processi stocastici: ergodicitá

Un processo stocastico detto ergodico nella media se vale

$$lim_{t\to\infty}\hat{\mu}_{x(.)}(t) = lim_{t\to\infty}\mu_{X(t)}$$

ovvero se, al crescere di t, la media temporale converge in probabilit allo stesso valore a cui tende il valore atteso delle singole variabili aleatorie.

Processi di Markov

Un processo stocastico $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_t, \ldots$ si dice processo di Markov se vale la seguente *Proprietá di Markov*:

$$Prob(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0) = Prob(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$

Proprietá Markoviana = Assenza di memoria (la probabilitá di uno stato NON dipende dall'istante di osservazione).

Proprietá

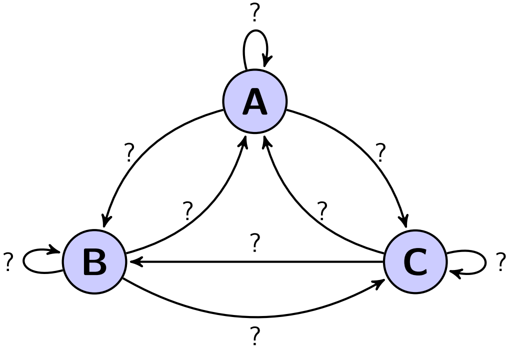
Assunto che all'istante t la variabile aleatoria T é distribuita come $1 - e^{-\lambda t}$, allora nel seguente intervallo $t + x$ é distribuitaa nello stesso modo: $\mathrm{Prob}\{T \leq t + x \mid T > t\} = 1 - e^{-\lambda x}$

Proprietá

La distribuzione esponenziale é l'unica ad avere la Proprietá Markoviana

Catene di Markov

Descrive processi stocastici nei quali l'occorrere dell'evento all'istante attuale e' influenzato solo dall'evento occorso all'istante precedente. MM si puo' esprimere con un grafo. Per esempio:



- La MM della slide precedente puo' descrivere per esempio lo stato del clima (A=piovoso - B=soleggiato - C=nuvoloso). Predire il clima di domani sulla base del clima odierno.
- Una MM puo' anche essere usata per generare una sequenza di simboli ABC. Per esempio, partendo dallo stato A e generando numeri a caso, possiamo ottenere la sequenza

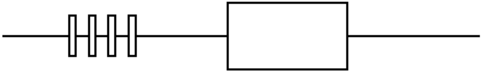
  `ACCCCAABCBBBABCACCBBBAA`

  oppure la sequenza

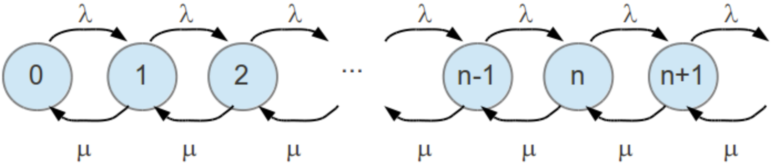
  `AACCACCABCCCBBBABCBBBAA`

  e cosí via.
- Quante sequenze possiamo generare? naturalmente in questo caso di connessioni complete possiamo generare infinite sequenze di tre simboli se non c'e' limite alla lunghessa delle stringhe. Se il limite di lunghezza é di M simboli, si possono generare 3^M sequenze.

Descrizione di una coda M/M/1 con un processo di Markov

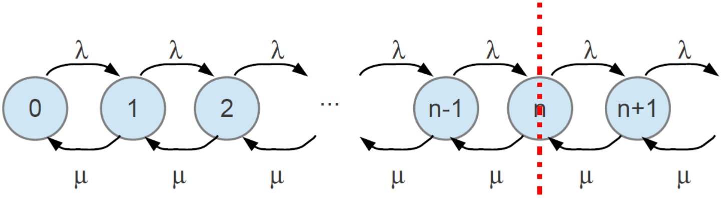


Stati del Modello di Markov: probabilitá che ci siano *n* processi nel sistema:



Conservazione del flusso

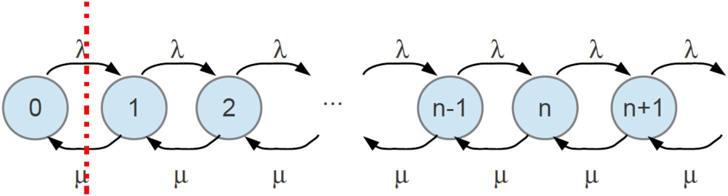
Equazione fondamentale: flusso entrante = flusso uscente
Sulle sezioni verticali:



$$\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = (\lambda + \mu) P_n \rightarrow \rho P_{n-1} + P_{n+1} = (1+\rho) P_n$$

Conservazione del flusso

Equazione fondamentale: flusso entrante = flusso uscente
Sulle sezioni verticali:



$$\lambda P_1 = \lambda P_0 \rightarrow P_1 = \rho P_0$$

$$P_n = \rho^n P_0$$