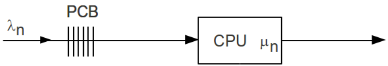
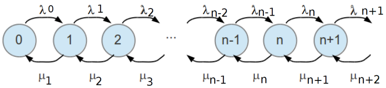
Esempi di utilizzo dei Processi di Markov

Coda M/M/1 con frequenza d'arrivo e partenza variabili

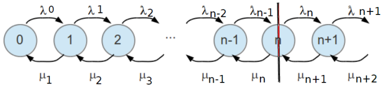
Ipotesi: le frequenze λ e μ dipendono dal numero di processi:



La catena di Markov che descrive partenze e arrivi é:



Principio di Conservazione del Flusso (partenze = arrivi) nella linea verticale e nello stato 0



Coda M/M/1 con frequenza d'arrivo e partenza variabili

→ equazioni :

$$\mu_{k+1} Prob_{k+1} + \lambda_{k-1} Prob_{k-1} = (\lambda_k + \mu_k) Prob_k \tag{1}$$

$$\lambda_0 Prob_0 = \lambda_1 Prob_1 \tag{2}$$

Dalla (2): $Prob_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} Prob_0$
Dalla (1), per k=1:
$\mu_2 Prob_2 + \lambda_0 Prob_0 = (\lambda_1 + \mu_1) Prob_1 = (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\lambda_0}{\mu_1} Prob_0 \ \ldots$
$\mu_2 Prob_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1} Prob_0 \rightarrow Prob_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_1} Prob_0 \ \ldots$

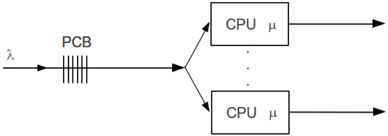
$$Prob_k = Prob_0 \prod_{n=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \tag{3}$$

Dato che $\sum_{k=0}^{\infty} Prob_k = 1$

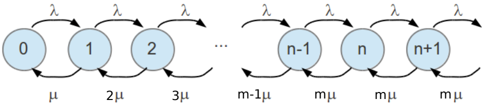
$$\rightarrow Prob_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} \text{ e } Prob_k = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

Coda M/M/m

Consideriamo un sistema con m CPU.



La frequenza delle partenze aumenta di un fattore pari a m: $\mu_k = k\mu$ per $k = 0..m$ Se $k \geq m$, allora $\mu_k = m\mu$.
Il diagramma degli stati del processo di Markov é:



Coda M/M/m

Dalla (3), $Prob_k = Prob_0 \prod_{n=0}^{k-1} \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}}$, con $\lambda_n = \lambda$ e $\mu_{n+1} = (n+1)\mu$, si ha:

$$Prob_k = Prob_0 \prod_{n=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(n+1)\mu}, \text{ per } k < m \tag{4}$$

$$Prob_k = Prob_0 \prod_{n=0}^{m-1} \frac{\lambda}{(n+1)\mu} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{m\mu}, \text{ per } k \geq m \tag{5}$$

Dalla $\sum_0^\infty Prob_k = \sum_0^{m-1} Prob_k + \sum_m^\infty Prob_k = 1$ si ottiene $Prob_0$. Infatti, da

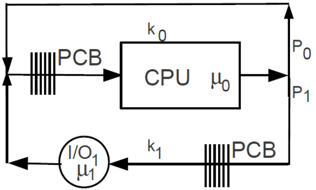
$Prob_0 (\sum_{k=0}^{m-1} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(n+1)\mu} + \sum_{k=m}^{\infty} \prod_{n=0}^{m-1} \frac{\lambda}{(n+1)\mu} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{m\mu}) = 1$

abbiamo:

$Prob_0 = (\sum_{k=0}^{m-1} \prod_{n=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(n+1)\mu} + \sum_{k=m}^{\infty} \prod_{n=0}^{m-1} \frac{\lambda}{(n+1)\mu} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{m\mu})^{-1}$

Un caso di coda chiusa

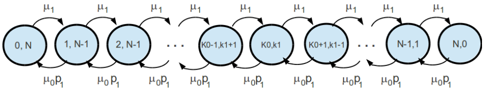
Variante di coda chiusa:



- k_0 = numero di processi nella coda CPU, $k1$ = numero di processi nella coda I/O.
- $k_0 + k_1 = N$.
- $Prob(k_0, k_1)$ é la probabilitá che ci siano k_0 processi nella coda CPU e k_1 processi nella coda I/O.

Catene di Markov

Diagramma degli stati del relativo processo di Markov:



Il principio di conservazione di flusso applicato sul nodo (k_0, k_1) fornisce le seguenti equazioni:

$$\mu_1 Prob(0, N) = P_1 \mu_0 Prob(1, N-1)$$

$$\mu_1 Prob(N-1, 1) = P_1 \mu_0 Prob(N, 0)$$

$$P_1 \mu_0 Prob(k_0 + 1, k_1 - 1) + \mu_1 Prob(k_0 - 1, k_1 + 1) = (\mu_1 + P_1 \mu_0) Prob(k0, k1)$$

dividendo per μ_1 queste equazioni diventano

$$Prob(0, N) = \rho Prob(1, N-1) \tag{6}$$

$$Prob(N-1, 1) = \rho Prob(N, 0) \tag{7}$$

$$\rho Prob(k_0 + 1, k_1 - 1) + Prob(k_0 - 1, k_1 + 1) = (1 + \rho) Prob(k0, k1) \tag{8}$$

dove si é posto $\rho = \frac{P_1 \mu_0}{\mu_1}$.

Si puó verificare per sostituzione che la soluzione della (8) é esponenziale:

$$Prob(k_0, k_1) = \frac{\rho^{k_1}}{C}$$

dove C é una costante da determinare usando il fatto che $\sum_{\text{foreach } k_0, k_1 | k_0 + k_1 = N} Prob(k_0, k_1) = 1$. Quindi: $C = \sum_0^N \rho^k = \frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}$ In definitiva:

$$Prob(k_0, k_1) = \rho^{k_1} \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \tag{9}$$

e quindi: $Prob(0, N) = \rho^N \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$ Da questa si puó calcolare l'utilizzazione della CPU, $U = 1 - Prob(0, N) = \frac{1-\rho^N}{1-\rho^{N+1}}$