Scorte

Domanda stocastica

31/03/03 11.40

Indice

- tassonomia
- newsboy
- (T,S)
- (T,Q)
- (Q,R)
- (S,s)
- ABC

Considerazioni iniziali

In presenza di domanda stocastica:

- non ammettere rotture di scorta può essere
  - molto costoso (se la domanda varia in modo limitato),
  - impossibile (se la domanda è potenzialmente illimitata);
- il livello delle scorte in magazzino è stocastico e deve essere controllato.

Considerazioni iniziali

La domanda stocastica implica che il risultato economico di una decisione è anche esso una variabile stocastica, quindi la minimizzazione dei costi può riguardare:

- nel caso di decisioni ripetute: il **valore atteso dei costi**, infatti la legge dei grandi numeri garantisce che, con probabilità uno, tale valore coincide con quello reale nel lungo periodo;
- nel caso di una o poche decisioni: altri valori a seconda della **predisposizione al rischio** del decisore.

Considerazioni iniziali

In seguito si considera la domanda stazionaria nella media e nella varianza.

I risultati ottenuti sono “sufficientemente” robusti che, per “lente” variazioni dei parametri della domanda, rimangono “quasi”-ottimali se calcolati rispetto ai valori aggiornati* dei parametri.

*l’aggiornamento dei parametri verrà visto nella parte del corso riguardante le previsioni.

Metodologia generale

- esprimere il costo globale in funzione di Q e della domanda;
- determinare il valore atteso del costo;
- determinare Q^* che minimizza il valore atteso del costo.

Tassonomia

Problemi classificabili in base a

- controllo:
  - continuo,
  - periodico;
- componente costante del costo d’ordine:
  - costante (eventualmente nullo) anche in caso di mancato ordine,
  - presente solo per ordini non nulli;
- dimensione lotto:
  - costante,
  - variabile;
- penalità di penuria / livelli di servizio.

Tassonomia

- controllo
  - continuo:
    - maggiori costi di controllo,
    - minori costi di mantenimento e di penuria;
  - periodico:
    - minori costi di controllo,
    - maggiori costi di mantenimento e di penuria;
- dimensione lotto
  - costante:
    - facilmente gestibile coi fornitori
  - variabile.

Tassonomia

Politiche gestione

Controllo Dimensione ordine	Periodico *T*	Continuo (a punto di riordino *R* o *s*)
Fisso *Q*	*(T,Q)*	*(Q,R) = (s,Q)*
A raggiungento di soglia *S*	*(T,S)*	*(s,S)*

politiche su singolo periodo: newsboy,...

politiche ibride o derivate: *(T,s,S), (S-1,S), ...*

Tassonomia

(T,Q) : periodo di riordino e dimensione lotto costanti.

Molto semplice, ideale per i fornitori, attuabile solo con una politica in cui si permettono mancate vendite. Condizione di stabilità impone $Q \leq \lambda T$.

(s,Q) : si riordina lotto di dimensione costante quando il livello di magazzino è al disotto di una soglia *s*, anche indicato come ***(Q,R)***.

Richiede controllo continuo, ma rimane comunque facile da attuare, a rischio di *overshooting*, i.e., in presenza di domanda con forti oscillazioni la dimensione *Q* del lotto può essere insufficiente a portare il livello di magazzino sopra *s*, oppure superare tale valore di poco, e quindi richiedere ordini successivi a breve distanza.

Tassonomia

(T,S) : periodo di riordino costante, si riordina fino al raggiungimento di un fissato livello *S* di scorta disponibile.

Di semplice attuazione, ma di prestazioni peggiori che *(s, S)*.

(s,S) : si riordina fino al raggiungimento di un fissato livello *S* di scorta disponibile quando il livello di magazzino è al disotto di una soglia *s*.

Se attuata in controllo continuo è la politica a prestazioni migliori, ma il calcolo dei valori ottimi di *s* e *S* è in generale estremamente complesso. Spesso utilizzato con valori approssimati.

(T,s,S) : come *(T,S)* tranne nel caso che il livello delle scorte scenda sotto il valore *s*, in questo caso si riordina immediatamente.

Commenti

La stessa organizzazione può ovviamente utilizzare diverse politiche per tipi di scorte diverse in funzione del valore delle parti considerate, della localizzazione dei magazzini e dei costi delle scorte.

Ad esempio la Marina Militare Olandese applica una gestione ***(s,Q)*** a livello centrale (cantieri), mentre applica una gestione ***(S-1,S)*** sulle navi. Si osservi come quest'ultima politica è pressoché imposta dagli altissimi costi di penalità.

Livello di servizio

Quando non si riescono a stimare i costi di penuria si procede imponendo un **livello di servizio** ed eventualmente stimando a posteriori i costi di penuria

Livello di servizio

Due livelli di servizio base:

- Tipo 1

  percentuale β_1 attesa di periodi in cui si è andati sotto scorta.

  nel caso del newsboy classico questo corrisponde a porre

  $$F(S) = 1 - \beta_1$$

- Tipo 2

  percentuale β_2 attesa di domanda a cui non si è stati capaci di rispondere con merce in scorta in mano

  nel caso del newsboy classico questo corrisponde a porre

  $$n(S)/E\{D\} = \int_S^\infty (x - S) f(x) dx / \int_0^\infty x f(x) dx = \beta_2$$

Livello di servizio

Commenti:

- il primo livello di servizio è può essere particolarmente adatto quando, a parità di domanda, si hanno pochi clienti. In questo modo si impedisce che essi abbiano la sensazione che in ogni periodo la loro domanda abbia un alto rischio di non essere completamente soddisfatta, anche se di pochissimo.
- in genere, a parità di livello, il servizio di Tipo 1 è più stringente del servizio di Tipo 2, i.e., per una fissata politica di riordino $\beta_1 > \beta_2$.
- il primo livello di servizio è più facile da calcolare.

Newsboy classico

Singolo periodo:

caso materiali non utilizzabili il periodo successivo, e.g.:

- giornali;
- alimenti freschi;
- fiori;
- ... .

Ipotesi

- orizzonte: singolo periodo *T*;
- domanda stocastica
  - complessiva nel periodo: *D*,
  - funzione di distribuzione della domanda: *f(x)*, cumulata: *F(x)*, media μ, varianza σ^2;
- lead time nullo;
- costi:
  - costo fisso per ordine: *K*,
  - costo variabile per ordine: *c*,
  - costo penuria: *p*,
  - costo mantenimento: *h;*
- ricavo unitario *B*.

Modello

- variabili decisionali:
  - quantità ordinata (dimensione del lotto): *Q*;
- disturbo:
  - domanda cumulata fine periodo: *D*;
- obiettivo:
  - minimizzazione dei costo complessivo nel periodo.

Modello (cont.)

- obiettivo:

poichè il costo nel periodo risulta essere in funzione della domanda *D*

$$G(Q,D) = cQ + h\max(Q - D,0) + p\max(D - Q,0) + K - B\min(Q,D)$$

l'obiettivo da minimizzare è

$$G(Q) = E\{G(Q,D)\} =$$

$$= K + cQ + h\int_0^Q (Q - x) f(x)dx + p\int_Q^\infty (x - Q) f(x)dx -$$

$$- B\int_0^Q x f(x)dx - BQ\int_Q^\infty f(x)dx$$

Modello (cont.)

riordinando *G(Q)* si ottiene

$$G(Q) = K + cQ + h\int_0^Q (Q - x) f(x)dx + (p + B)\int_Q^\infty (x - Q) f(x)dx - B\mu$$

Soluzione

calcolando le derivate di $G(Q)$ si ottiene

$$dG/dQ = c + hF(Q) - (p + B)(1-F(Q))$$

$$d^2G/dQ^2 = hf(Q) + (p + B)f(Q)$$

quindi $G(Q)$ è una funzione convessa con minimo in Q^* t.c.:

$$F(Q^*) = (p + B - c) / (p + B + h)$$

$F(Q^*)$ = probabilità che la domanda sia non superiore a Q^*

Soluzione (cont.)

Se $D \sim n(\mu,\sigma)$

$$F(x) = P$$

per

$$x = \mu + z_P \sigma$$

dove z_P è il valore in cui la cumulata della distribuzione normale standard assume il valore P.

Newsboy classico

Profitto unitario:

ricavo - (costo di acquisto + costi gestione variabili)

Costi:

- *overage:* in caso di scorte positive alla fine del periodo;
- *underage*: in caso di scorte negative alla fine del periodo.

costo overage = (costo di acquisto + costi gestione variabili) -
- ricavo da vendita scorte fine periodo = c + h
costo underage = mancato profitto + costo disaffezione + ... =
= p + B - c

Domanda discreta / Lotto discreto

Si arrotonda al valore di Q corrispondente al costo minore.

Scorta iniziale

Sia $I(0) > 0$

- se $I(0) < Q^*$, si ordina $Q^* - I(0)$;
- se $I(0) \geq Q^*$, non si ordina.

Risultato dovuto alla convessità di $G(Q)$.

Multi-periodo
con costo d'ordine sempre presente

- controllo:
  - periodico;
- componente fissa del costo d'ordine:
  - costante (eventualmente nullo*) anche in caso di mancato ordine;
- dimensione lotto:
  - variabile;
- penalità di penuria:
  - varie.

*tipico nella tentata vendita

Multi-periodo con back-order

- orizzonte: infinito;
- domanda stocastica i.i.d:
  - complessiva nel periodo i-mo : D_i ,
- lead time nullo;
- back-order ammesso
- costi:
  - costo fisso per ordine: K,
  - costo variabile per ordine: c,
  - costo penuria: p,
  - costo mantenimento: h;
- ricavo unitario B.

Multi-periodo con back-order

Osservazione:
essendo tutto stazionario ed essendo attuato il back-order…

esiste una politica ottima che, in ogni periodo, ordina un lotto di dimensione:

dimensione lotto =
= domanda non soddisfatta periodo precedente / scorta residua +
+ quantità necessaria per raggiungere il livello S

si osserva che S è indipendente dal periodo.

Multi-periodo con back-order

Osservazione (cont.):

essendo tutto stazionario ed essendo attuato il back-order…

in ogni periodo la dimensione del lotto è uguale alla domanda del periodo precedente

(*dimensione lotto*)$_i$ =

= *domanda non soddisfatta periodo precedente / scorta residua +*

+ quantità necessaria per raggiungere il livello S =

= $D_{i-1} - S + S$

Modello *(T,S)*

- variabili decisionali:
  - livello inizio periodo: *S*;
- disturbo:
  - domanda cumulata fine periodo: *D*;
- obiettivo:
  - minimizzazione dei costo medio.

Modello (cont.)

obiettivo:

il costo nel periodo i-mo risulta essere:

$$K + cD_{i-1} + hmax(S - D_i,0) + pmax(D_i - S,0) - Bmin(S,D_i) - Bmax(D_{i-1} - S,0)$$

il costo nel periodo iniziale risulta essere:

$$K + cS + hmax(S - D_1,0) + pmax(D_1 - S,0) - Bmin(S,D_1)$$

Soluzione

il costo atteso sui primi *n* periodi risulta essere:

$$nK + cS + (c - B)E\{D_1 + \ldots + D_{n-1}\} - BE\{min(S,D_n)\} +$$

$$+ n\left(h\int_0^S (S - x) f(x)dx + p\int_S^\infty (x - S) f(x)dx\right)$$

dividendo per *n* e eseguendo il limite all'infinito si ottiene

$$G(S) = K + (c - B)\mu + h\int_0^S (S - x) f(x)dx + p\int_S^\infty (x - S) f(x)dx$$

il minimo è in *S** dove

$$F(S^*) = p / (p + h)$$

Multi-periodo con mancata vendita

- orizzonte: infinito;
- domanda stocastica i.i.d:
  - complessiva nel periodo i-mo : D_i ,
- lead time nullo;
- mancata vendita ammessa
- costi:
  - costo fisso per ordine: *K*,
  - costo variabile per ordine: *c*,
  - costo penuria: *p*,
  - costo mantenimento: *h;*
- ricavo unitario *B*.

Multi-periodo con mancata vendita

Osservazione:

essendo tutto stazionario perdendo gli ordini non soddisfatti, quindi ….

- tutti periodi sono identici nell'evoluzione attesa;
- esiste una politica ottima che, in ogni periodo, ordina un lotto di dimensione $Q=S$ se si va sottoscorta, altrimenti riordina fino ad *S*, si ordina quindi ogni volta $min\{S,D_{i-1}\}$.

Modello (cont.)

obiettivo:

il costo nel periodo generico *i* risulta essere:

$$K + cmin(D_{i-1},S) + hmax(S - D_i,0) + pmax(D_i - S,0) - Bmin(D_i,S)$$

il costo atteso sui primi *n* periodi risulta essere:

$$nK + cS + ((n-1)c - nB)(\mu - \int_S^\infty (x-S) f(x)dx) +$$
$$+ n(h\int_0^S (S-x) f(x)dx + p\int_S^\infty (x-S) f(x)dx)$$

Soluzione

dividendo per *n* e eseguendo il limite all'infinito si ottiene

$$G(S) = K + (c-B)(\mu - \int_S^\infty (x-S) f(x)dx) +$$
$$+h\int_0^S (S-x) f(x)dx + p\int_S^\infty (x-S) f(x)dx$$

il minimo è in *S** dove

$$F(S^*) = (p + B - c) / (p + B + h - c)$$

Multi-periodo con mancata vendita (materiale deperibile)

- orizzonte: infinito;
- domanda stocastica i.i.d:
  - complessiva nel periodo i-mo : D_i ,
- lead time nullo;
- mancata vendita ammessa, scorte a fino periodo perse
- costi:
  - costo fisso per ordine: *K*,
  - costo variabile per ordine: *c*,
  - costo penuria: *p*,
  - costo smaltimento prodotti invenduti: *h;*
- ricavo unitario *B*.

Multi-periodo con mancata vendita (materiale deperibile)

Osservazione:

essendo tutto stazionario perdendo gli ordini non soddisfatti, quindi ….

- tutti periodi sono identici nell'evoluzione attesa;
- esiste una politica ottima che, in ogni periodo, ordina un lotto di dimensione *Q* e elimina la merce invenduta.

Modello *(T,Q)*

- variabili decisionali:
  - quantità ordinata (dimensione del lotto): *Q*;
- disturbo:
  - domanda cumulata fine periodo: *D*;
- obiettivo:
  - minimizzazione dei costo medio.
- soluzione:
  - newsboy classico (non ha senso distinguere singolo da multiperiodo)

Multi-periodo: orizzonte finito

- calcoli complessi;
- risultato intermedio tra singolo periodo e orizzonte infinito.

Modello *(Q,R)*

- controllo:
  - continuo;
- componente costante del costo d'ordine:
  - presente solo per ordini non nulli;
- dimensione lotto:
  - costante;
- penalità di penuria / qualità servizio:
  - vari.

Ipotesi

- orizzonte: infinito;
- domanda stocastica,
  - media λ, varianza v^2;
- lead time: τ;
- back-order / mancata vendita ammessi;
- costi:
  - costo fisso per ordine: *K*,
  - costo variabile per ordine: *c*,
  - costo penuria: *p*,
  - costo mantenimento: *h*.

Osservazione

Nei modelli *(T,Q)* e *(T,S)* interessava il valore della domanda complessiva nel periodo *T*.

Nei modelli con controllo continuo interessa il tasso istantaneo della domanda.

Esistono ovvie relazioni tra le statistiche delle due grandezze, se la domanda è un processo stazionario:

$$\lambda T = \mu,$$
$$v^2 T = \sigma^2;$$

Modello

- variabili decisionali*:
  - quantità ordinata (dimensione del lotto): *Q*,
  - punto di riordino: *R*,
  - scorta di sicurezza: *ss;*
- disturbo:
  - tasso domanda: media λ, varianza v^2;
- obiettivo:
  - minimizzazione dei costo medio.

* l'intervallo tra due ordini è variabile aleatoria con media *T* funzione della domanda e di *R*, ma non è una variabile decisionale

Il punto di riordino *R* va calcolato rispetto alla scorta disponibile (in mano + ordinato) in modo da non ordinare più volte.

Modello (cont.)

- obiettivo:
  - costi di mantenimento attesi con back-order:

    il livello atteso del magazzino alla fine di un ciclo è:

$$\int_0^\infty (R - x) f(x) dx = R - \lambda\tau$$

    si definisce scorta di sicurezza $ss = R - \lambda\tau$.

    le scorte variano in media tra $Q + ss$ e ss, quindi il valore atteso dei costi di mantenimento in un periodo è approssimativamente (poiché si calcolano in modo negativo i tempi, in genere brevi, in cui si va sottoscorta)

$$h(Q + 2ss)T/2$$

    quindi il valore medio per periodo è

$$h(Q + 2(R - \lambda\tau))/2$$

Modello (cont.)

- obiettivo:
  - costi di mantenimento attesi con mancata vendita:

    in ogni ciclo le scorte variano tra $m(R) + Q$ e $m(R)$ dove

$$m(R) = \int_0^R (R - x) f(x) dx \geq \int_0^\infty (R - x) f(x) dx = ss$$

    rappresenta il valore atteso delle scorte rimanenti dal periodo precedente, quindi il valore atteso dei costi di mantenimento in un periodo è approssimativamente (poiché si calcolano in modo negativo i tempi, in genere brevi, in cui si va sottoscorta)

$$h(Q + 2m(R))/2$$

Osservazione

Nel lucido precedente e nel seguito:

- $f(x)$ densità di probabilità della domanda complessiva durante il lead time τ.
- $F(x)$ funzione cumulata di probabilità della domanda in τ;

  se il tasso della domanda ha media λ e varianza v^2; la domanda complessiva in τ ha
- media:
  - se lead time costante $\lambda\tau$,
  - se lead time stocastico $\lambda E\{\tau\}$
- varianza: $v^2\tau$;
  - se lead time costante $v^2\tau$,
  - se lead time stocastico $v^2\tau + \lambda^2 var\{\tau\}$

  se il tasso è distribuito normalmente anche la domanda complessiva è distribuita in modo normale

Modello (cont.)

- obiettivo*
  - costi fissi d'ordine:

    valore atteso (il periodo è stocastico di media T) $K/T = K\lambda/Q$
  - costi variabili d'ordine:

    valore atteso $c\lambda$
  - costi di penuria (proporzionali alla domanda non soddisfatta):

    valore atteso $p\lambda n(R)/Q$

    dove

$$n(R) = \int_R^\infty (x - R) f(x) dx$$

* nel caso con back-order vale la relazione $\lambda T = Q$, poiché sul lungo periodo tutta la domanda deve essere soddisfatta; nel caso con mancate vendite la relazione è solo approssimata, poiché non tutta la domanda viene soddisfatta $\lambda T > Q$ l'approssimazione è accettabile in quanto solo una piccola frazione di domanda rimane inevasa.

Modello (cont.)

la funzione *G(Q,R)* è quindi

- nel caso di back-order

$$G(Q,R) = h(Q + 2(R - \lambda\tau))/2 + K\lambda/Q + c\lambda + p\lambda n(R)/Q$$

- nel caso di mancata vendita

$$G(Q,R) = h(Q + 2m(R))/2 + K\lambda/Q + c\lambda + p\lambda n(R)/Q$$

Soluzione con back-order

calcolando le derivate di *G(Q,R)* si ottiene

$$\partial G / \partial Q = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2(K + pn(R^*))\lambda}{h}}$$

$$\partial G / \partial R = 0 \Rightarrow 1 - F(R^*) = Q^*h/p\lambda$$

il problema deve essere quindi risolto per tentativi su *R**

Soluzione con mancata vendita

calcolando le derivate di *G(Q,R)* si ottiene

$$\partial G / \partial Q = 0 \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2(K + pn(R^*))\lambda}{h}}$$

$$\partial G / \partial R = 0 \Rightarrow 1 - F(R^*) = Q^*h/(Q^*h + p\lambda)$$

il problema deve essere quindi risolto per tentativi su *R**

Esempio

Si ha una domanda di 70 componenti al giorno con una deviazione standard di 25 componenti, ogni componente costa 10EUR, e il costo d'ordine è di 50 EUR, il tasso di interesse per il costo di mantenimento è di 20% l'anno per unità, il costo di penuria è di 5 EUR per unità, infine, il lead time è di tre giorni

Determinare:

- dimensione lotto economico,
- punto di riordino,
- intervallo medio di riordino.

Soluzione

Dati problema

$\lambda = 70$ *u/d*

$\nu = 25$ *u/d*

K = 50 EUR/ordine

i = 20%

c = 10 EUR/u

p = 5 EUR/u

$\tau = 3$ *d*

Dati derivati

$\mu = 210$ *u*

$\sigma = 43.3$ *u*

h = 0.0056 EUR/u d

Soluzione

Back-order

Q = 1137.82 u*

R = 301.23 u*

n(R) = 0.27 u*

ss = 91.23 u

E{T} = 16.25 d

β_1 *=1.76%*

β_2 *= 0.02%*

costi scorte = 6.83 EUR/d

costo acquisto = 700.00 EUR/d

costi scorte/acquisto = 0.98%

Mancata vendita

Q = 1137.82 u*

R= 301.23 u*

n(R) = 0.27 u*

m(R) = 91.50 u*

E{T} = 16.25 d

β_1 *= 1.76%*

β_2 *= 0.02%*

costi scorte = 6.83 EUR/d

costo acquisto = 700.00 EUR/d

costi scorte/acquisto = 0.98%

Soluzione

EOQ con soglia $R = \mu$

Q = 1122.50 u*

R = 210 u*

n(R) = 17.27 u*

ss = 0 u

E{T} = 16.04 d

β_1 *= 50.00%*

β_2 *= 1.54%*

costi scorte = 11.62 EUR/d

costo acquisto = 700.00 EUR/d

costi scorte/acquisto = 1.66%

(Q,R) con livelli di servizio

- orizzonte: infinito;
- domanda stocastica,
  - media λ, varianza ν^2;
- lead time: τ;
- livello di servizio tipo 1 / tipo 2;
- costi:
  - costo fisso per ordine: *K*,
  - costo variabile per ordine: *c*,
  - costo mantenimento: *h*.

Modello

- variabili decisionali:
  - quantità ordinata (dimensione del lotto): Q,
  - punto di riordino: R,
  - scorta di sicurezza: *ss;*
- disturbo:
  - tasso domanda: media λ, varianza v^2;
- obiettivo:
  - minimizzazione dei costo medio
- vincolo:
  - rispettare livello di servizio
- incognita:
  - penalità: p

Modello (cont.)

la funzione obiettivo $G(Q,R)$ nel caso di back-order

$$G(Q,R) = h(Q + 2(R - \lambda\tau))/2 + K\lambda/Q + c\lambda + p\lambda n(R)/Q$$

deve essere minimizzata tenendo conto dei vincoli imposti dai livelli di servizio

Soluzione con back-order

calcolando le derivate di $G(Q,R)$ si ottiene

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(K + pn(R^*))\lambda}{h}}$$

$$1 - F(R^*) = Q^*h/p\lambda$$

ricavando p (incognita) dalla seconda e sostituendo si ottiene...

Soluzione (cont.)

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\lambda(K + Q^* hn(R^*)/\lambda(1 - F(R^*)))}{h}}$$

risolvendo quindi in Q^*, si giunge a la formula **SOQ** (Service level Order Quantity), in cui Q^* è espresso in funzione di R^*.

$$Q^* = \frac{n(R^*)}{1 - F(R^*)} + \sqrt{\frac{2\lambda K}{h} + \left(\frac{n(R^*)}{1 - F(R^*)}\right)^2}$$

Soluzione tipo 1

- Si determina R^* imponendo che la probabilità di una domanda inferiore o uguale a R^* sia il livello di servizio voluto

$$F(R^*) = 1 - \beta_1$$

- si calcola $n(R^*)$, quindi Q^* tramite SOQ.

Soluzione tipo 2

- si impone che il valore atteso della percentuale di domanda per ciclo non immediatamente soddisfatta sia la frazione prevista dal livello di servizio:

$$n(R^*)/\lambda T = n(R^*)/Q^* = \beta_2$$

- si risolvono, per tentativi su R^*, contemporaneamente l'equazione precedente e SOQ per ottenere Q^*.

Esempio

Si ha una domanda di 70 componenti al giorno con una deviazione standard di 25 componenti, ogni componente costa 10EUR, e il costo d'ordine è di 50 EUR, il tasso di interesse per il costo di mantenimento è di 20% l'anno per unità, il lead time è di tre giorni

Assumendo che sia richiesto o $\beta_1 = 1\%$ o $\beta_2 = 0.1\%$ e si voglia attuare una politica con back-order determinare :

- dimensione lotto economico,
- punto di riordino,
- intervallo medio di riordino.

Soluzione

Dati problema

$\lambda = 70$ u/d

$v = 25$ u/d

$K = 50$ EUR/ordine

$i = 20\%$

$c = 10$ EUR/u

$\beta_1 = 1\%$ o $\beta_2 = 0.1\%$

$\tau = 3$ d

Dati derivati

$\mu = 210$ u

$\sigma = 43.3$ u

$h = 0.0056$ EUR/u d

Soluzione

Caso β_1=1%
Q = 1137.27 u*
R = 310.70 u*
n(R) = 0.15 u*
ss = 100.70 u
E{T} = 16.24 d
p =9.00 EUR/u
β_2 = 0.01%
costi scorte = 6.88 EUR/d
costo acquisto = 700.00 EUR/d
costi scorte/acquisto = 0.98%

Caso β_2= 0.1%
Q = 1141.35 u*
R= 277.00 u*
n(R) = 1.14 u*
ss = 67.00 u
E{T} = 16.30 d
β_1 = 6.09%
p =1.49 EUR/u
costi scorte = 6.71 EUR/d
costo acquisto = 700.00 EUR/d
costi scorte/acquisto = 0.96%

Newsboy
con costo d'ordine solo per lotti non nulli

- controllo:
  - periodico;
- componente costante del costo d'ordine:
  - presente solo per ordini non nulli;;
- dimensione lotto:
  - variabile;
- penalità di penuria:
  - varie.

Ipotesi

- orizzonte: singolo periodo *T*;
- domanda stocastica
  - complessiva nel periodo: *D*,
  - funzione di distribuzione della domanda: *f(x)*, cumulata: *F(x)*, media μ, varianza σ^2;
- lead time nullo;
- costi:
  - costo fisso per ordine: *K(Q)*,
  - costo variabile per ordine: *c*,
  - costo penuria: *p*,
  - costo mantenimento: *h;*
- ricavo unitario *B*.

Modello

- variabili decisionali:
  - quantità ordinata (dimensione del lotto): *Q*;
- disturbo:
  - domanda cumulata fine periodo: *D*;
- obiettivo:
  - minimizzazione dei costo complessivo nel periodo.

Modello (cont.)

- obiettivo:

  poichè il costo nel periodo risulta essere in funzione della domanda *D*

  $G(Q,D) = cQ + h\max(Q - D,0) + p\max(D-Q,0) + K(Q) - B\min(Q,D)$

  l'obiettivo da minimizzare è

  $G(Q) = E\{G(Q,D)\} =$

  $$= K(Q) + cQ + h\int_0^Q (Q-x) f(x)dx + p\int_Q^\infty (x-Q) f(x)dx -$$

  $$- B\int_0^Q x f(x)dx - BQ\int_Q^\infty f(x)dx$$

Modello (cont.)

riordinando *G(Q)* si ottiene

$$G(Q) = K(Q) + cQ + h\int_0^Q (Q-x) f(x)dx + (p+B)\int_Q^\infty (x-Q) f(x)dx - B\mu$$

notare la discontinuità in *0*

Soluzione

calcolando le derivate di *G(Q)* considerando *K(Q)* costante si ottiene come in precedenza *G(Q)* è una funzione convessa con minimo in *S* t.c.:

$$F(S) = (p + B - c) / (p + B + h)$$

F(S) = probabilità che la domanda sia non superiore a *S*.

si ordina se $G(S) < G(0)$

Scorta iniziale

Sia $I(0) > 0$ esiste un valore s t.c.

- $s < S$
- $G(s) - K(s) = G(S)$

quindi se

- se $I(0) < s$, si ordina $S - I(0)$
- se $I(0) \geq s$ non si ordina.

Multi-periodo

con costo d'ordine solo per lotti non nulli

In generale il calcolo dei valori ottimi *(s, S)* su più periodi è estremamente complesso e non giustificato economicamente (in pratica si deve ricorrere alla programmazione dinamica e/o alla simulazione). Si ricorre quindi a dei metodi approssimati.

Modello *(s,S)*

- controllo:
  - periodico / continuo;
- componente costante del costo d'ordine:
  - presente solo per ordini non nulli;
- dimensione lotto:
  - variabile;
- penalità di penuria / livello servizio:
  - vari.

Ipotesi

- orizzonte: infinito;
- domanda stocastica,
  - media λ, varianza v^2;
- lead time: τ;
- back-order;
- costi:
  - costo fisso per ordine: K,
  - costo variabile per ordine: c,
  - costo penuria: p,
  - costo mantenimento: h.

Soluzione approssimata

- Controllo continuo / periodico (approssimato $\varepsilon\% < 5\%$, in media)
  - Si calcolano Q e R come nel metodo *(Q,R);*
  - si pone:

$$s = R;$$

$$S = Q + R.$$

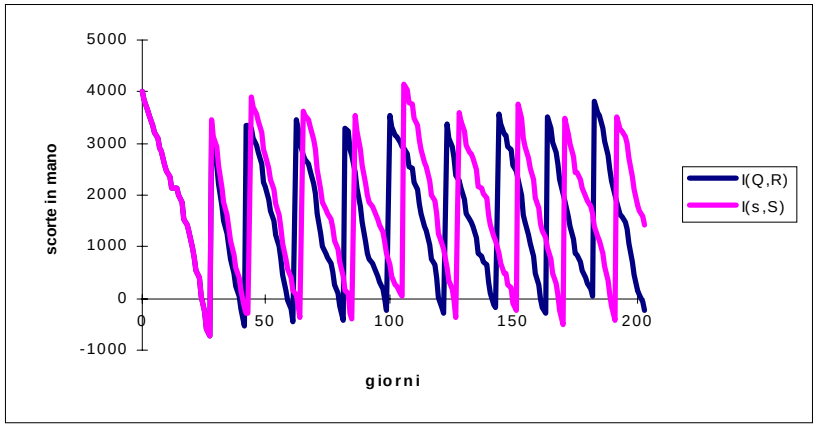
Notare che non si presenta il problema dell'overshooting.

- Altri metodi più complessi da utilizzare in presenza di domanda estremamente variabile: vedi Silver e Peterson (bibliografia)

Confronto *(s,S)* vs. *(Q,R)*

- se la domanda si realizza in ordini di piccole dimensioni rispetto a *s* o a *R* le due politiche praticamente coincidono;
- se la domanda si realizza con ordini di dimensioni estremamente variabili la politica *(s, S)* garantisce un cadenzamento dei riordini più regolare, non si corre il rischio che a causa di overshooting si riordinare in tempi estremamente ravvicinati;
- nessun controllo è realmente continuo, in genere si può supporre che gli ordini ai fornitori vengano emessi al più una o due volte al giorno (e.g., per medicinali), il rischio di overshooting si deve quindi valutare rispetto alle domanda giornaliera o semigiornaliera.

Confronto *(s,S)* vs. *(Q,R)*



Politica *(S-1,S)*

La politica *(S-1,S)* è un caso particolare di *(s, S)* da utilizzare in presenza di prodotti:

- *slow-mover**,
- di notevole valore,
- domanda di un prodotto per volta.

Essa consiste nel ripristinare la scorta disponibile ogni qual volta si sia soddisfatta una domanda.

* prodotti utilizzati o commercializzati in basse quantità per periodo (in genere < 100 pz.l'anno)

Riconoscimento

Un prodotto è uno slow-mover quando la dimensione ottima di riordino è 1.

Il costo medio (supponendo domanda costante) è:

$$K\lambda/Q + hQ/2$$

conviene quindi Q=1 rispetto a Q=2 se:

$$K\lambda/1 + h1/2 \leq K\lambda/2 + h2/2$$

cioè se:

$$\lambda \leq h/K = ic/K$$

Distribuzione

Se la domanda di prodotti durante il lead time è inferiore a 10, l'approssimazione gaussiana della sua distribuzione non è accettabile e si devono usare o distribuzioni empiriche tratte dai dati storici o la distribuzione poissoniana.

Distribuzione di Poisson:

$$P(n \text{ ordini in un tempo } \tau) = (\lambda \tau)^n e^{-\lambda \tau}/n!$$

Soluzione

Penalità: mancata vendita, proporzionale alla domanda non immediatamente soddisfatta.

- Prima dell'arrivo della prima domanda la scorta in mano vale *S*;
- non si va sottoscorta se il numero prodotti richiesti durante un lead time non eccede *S*;
- l'intervallo tra due domande successive per un prodotto è esponenziale, quindi senza memoria;
- si può pensare di campionare il magazzino negli istanti 0, τ, 2τ, …, in realtà è indifferente date le proprietà della distribuzione di Poisson.

Soluzione

Sul lungo periodo (per $t \to \infty$)

- il livello medio scorte in mano è:

$$I(S) = \sum_{j=0}^{s} (S - j) P(n = j)$$

- la quantità media di domanda non servita è:

$$\lambda t\, p(n>S)/t = \lambda P(n>S)$$

da cui il costo medio risulta essere

$$G(S) = hI(S) + \lambda P(n>S)$$

Soluzione

$G(S)$ è una funzione con un unico minimo nel primo S per cui

$$G(S) \leq G(S+1)$$

sostituendo si ottiene che S^* deve soddisfare la condizione

$$P(n=S^*) / P(n \leq S^*) = h / \lambda p$$

Conclusioni

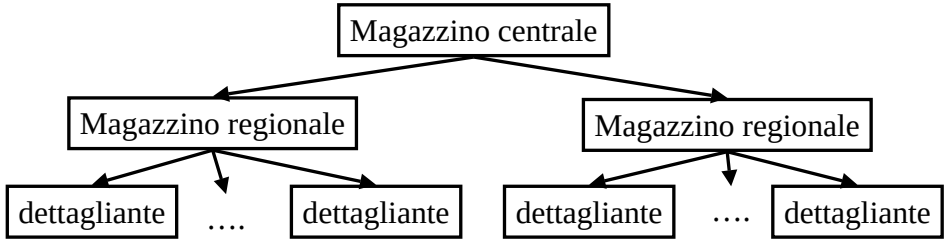
- Esistono varie politiche di gestione, ognuna ha determinate caratteristiche che la possono rendere preferibile rispetto alle altre.
- La scelta va eseguita in base a:
  - vincoli contrattuali,
  - classe della merce trattata;

  e si devono anche considerare politiche di riordino coordinate in caso di codici che presentino forte correlazione (vedi anche MRP).
- I problemi si ingigantiscono se ci sono più livelli di magazzini (cercare multi-echelon come parola chiave in letteratura).

Conclusioni

Echelon: scaglione, livello.

Sistemi di distribuzione composti di magazzini su diversi livelli gerarchici. (In situazioni di prevedibilità della domanda, nei livelli più alti si posso anche utilizzare politiche simili a quelle per il lot-sizing in presenza di domanda *lumpy*).



Gestione ABC

- classe A:
  - slow-mover ad alto valore politica *(S-1,S)*,
  - altrimenti politiche *(s,S)* o *(Q,R)*, facendo analisi storiche per determinare correttamente la distribuzione della domanda;
- classe B:
  - politiche *(s,S)* o *(Q,R)*, supponendo la distribuzione della domanda normale,
  - politiche *(T,S)*, *(T,Q)* con periodo breve;

Gestione ABC

- classe C:
  - slow-mover valutare se non tenere scorte,
  - altrimenti politiche *(T,S)*, *(T,Q)* con periodo lungo,
  - oppure *(Q,R)* con metodo *two-bins*,
  - comunque aggregare prodotti da fornitore comune.
- infine liberarsi delle scorte inutili:
  - restituendole al fornitore,
  - vendendole scontate,
  - utilizzandole per fini diversi,
  - vendendole come materiale riciclabile.

Gestione ABC

Come classificare il prodotto *j-mo* nelle classi A, B, C?

- rispetto al costo del flusso $valore_j = c_j\lambda_j$
- rispetto al valore medio della merce in magazzino supponendo di applicare EOQ

$$valore_j = c_j Q^*/2 = (K_j c^2_j \lambda_j / 2h_j)^{1/2} = (K_j c_j \lambda_j / 2i)^{1/2}$$

Exchange curve

Le *exchange curve*, molto gradite dal management, sono grafici che tipicamente esprimono il valore del capitale immobilizzato in funzione del numero di ordini effettuati, oppure la dimensione della scorta di sicurezza in funzione del livello di servizio.

Spesso infatti i costi non sono facilmente valutabili e tali curve aiutano nella scelta.

Ad esempio i costi d'ordine possono essere discontinui nel numero di ordini da eseguire in funzione del numero di persone o camion necessari.

Exchange curve

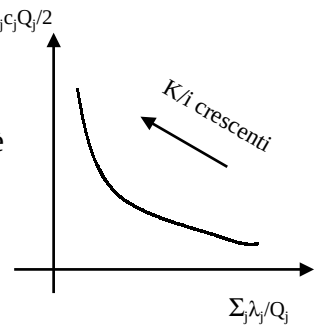
Esempio: se *K/i* è valore costante indipendente dai prodotti trattati:

- il valore medio delle scorte è

$$\Sigma_j c_j Q_j/2$$

- il numero di ordini per unità di tempo è

$$\Sigma_j \lambda_j/Q_j$$



Scelta sistema informativo

Controllare:

- che politiche di riordino vengono implementate;
- che approssimazioni vengono effettuate;
- come vengono calcolate le soglie *s* o *R* (in generale invece si compie un errore spesso trascurabile ad approssimare *Q* con l'*EOQ*);
- se vengono aggiornati automaticamente i valori dei parametri delle politiche quando la domanda o i lead time variano.

Appendice matematica

Espressione di *n(R)*

- distribuzione normale media μ, varianza σ^2

$$n(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_R^\infty (x-R)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(R-\mu)^2}{2\sigma^2}} + (\mu - R)(1-F(R))$$

Appendice matematica

osservazioni:

- la distribuzione normale è una approssimazione accettabile se *F(0) ≈ 0,*
- per *R = 0*, la domanda non evasa in media corrisponde alla domanda attesa, infatti

$$n(0) = \mu,$$

- per $R = \mu$, il livello finale del magazzino equivale ad un *random walk* in τ passi di media λ, infatti:

$$n(R) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$

- in questo caso e nei successivi *m(R) = R - μ + n(R)*

Appendice matematica

- distribuzione di Poisson media μ, varianza μ

$$n(R) = \sum_{i=R+1}^{\infty}(i-R)\frac{e^{-\mu}\mu^i}{i!} = \mu P(i \geq R) - RP(i \geq R+1)$$

con* $P(i \geq R) = (1 - F(R-1)) = \sum_{i=R}^{\infty}\frac{e^{-\mu}\mu^i}{i!}$

* i valori *P(i≥ R)* si trovano tabulati.

Appendice matematica

- distribuzione di Laplace* con media μ, varianza $2\theta^2$:

$$f(x) = e^{-|x-\mu|/\theta}/2\theta$$

$$n(R) = \theta\, e^{-|R-\mu|/\theta}/2$$

$$1 - F(R) = e^{-|R-\mu|/\theta}/2$$

si osservi come il rapporto *n(R)/(1-F(R))* usato in *SOQ* è indipendente da *R*.

* la distribuzione di Laplace è usata per gli slow-mover o comunque i prodotti con maggiore varianza nelle code che la distribuzione normale.