

# Il LaTeX mediante esempi

Enzo TONTI <sup>1</sup>

16 luglio 1998

<sup>1</sup>Dipartimento di Ingegneria Civile Piazzale Europa 1, 34127 Trieste, Italia. e-mail:  
tonti@univ.trieste.it

# Indice

0.1	Come è fatto un programma in LaTeX . . . . .	2
0.2	Tabelle . . . . .	10
0.3	Formule . . . . .	14
0.4	Array . . . . .	23
0.5	Integrali e somme . . . . .	28
0.6	Disegni fatti con LaTeX . . . . .	32
0.7	Inserire figure . . . . .	35
0.8	Indice analitico . . . . .	37
0.9	Bibliografia . . . . .	37
0.10	Titolo . . . . .	38
0.11	ESEMPIO: Formulazione variazionale . . . . .	39
0.11.1	Le condizioni per la formulazione variazionale . . . . .	39
0.11.2	La ricerca del nucleo $h(x, s)$ . . . . .	41
0.11.3	Eliminazione delle derivate . . . . .	42

## 0.1 Come è fatto un programma in LaTeX

Il linguaggio Tex <sup>1</sup> è stato scritto appositamente per la scrittura di testi scientifici, contenenti formule, tavole, figure. Lo ha scritto Donald Knuth <sup>2</sup> ed è di libero uso in quanto l'autore lo ha regalato alla comunità scientifica internazionale. Si tratta di un vero e proprio linguaggio di programmazione caratterizzato da un sorgente e da un compilato.

Successivamente Leslie Lamport ha migliorato di molto la maneggevolezza del Tex costruendo il Latex: questo non è di dominio pubblico ed è bene comperarlo. La tipica struttura di un programma in Latex è la seguente:

---

```
\documentstyle{report}
  preambolo
\begin{document}
  testo
\end{document}
```

---

Vi sono diversi "stili": lo stile articolo *article* , lo stile rapporto *report* , lo stile libro *book* , ecc. Ad esempio

---

```
\documentstyle{book}
  preambolo
\begin{document}
  testo
\end{document}
```

---

---

<sup>1</sup>Si pronuncia "tech", come in "high-tech".

<sup>2</sup>Autore di una classica opera in più volumi *Donald Knuth, The Art of Computer Programming Addison-Wesley, 1981, (seconda edizione)*

Per avere le lettere accentate è opportuno (non necessario) includere nel preambolo un apposito archivio, come indicato qui sotto

---

```
\documentstyle{report}
  \input{option_keys} % lettere accentate
\begin{document}
  testo
\end{document}
```

---

Il testo è battuto come in ogni altro editore di testi con la differenza che per andare a capo occorre lasciare una riga vuota e che se vi è più di uno spazio fra due parole è come se vi fosse uno spazio solamente.

Per ottenere il risultato seguente:

---

- lunedì
  - martedì
  - mercoledì
  - ecc.
- 

si deve scrivere:

---

```
\begin{itemize}
  \item lunedì
  \item martedì
  \item mercoledì
  \item ecc.
\end{itemize}
```

---

Per ottenere la numerazione automatica:

---

1. gennaio
  2. febbraio
  3. marzo
  4. ecc.
- 

si deve scrivere:

---

```
\begin{enumerate}
  \item gennaio
  \item febbraio
  \item marzo
  \item ecc.
\end{enumerate}
```

---

### Svantaggi della formulazione differenziale

1. impone delle condizioni di **derivabilità** delle funzioni che non sono richieste dal fenomeno fisico ( $\rightarrow$  soluzione debole; metodo di Galerkin);
  2. non si applica in presenza di **sorgenti concentrate** (nascono degli infiniti spaziali);
  3. non si applica a **fenomeni impulsivi** (nascono degli infiniti temporali);
  4. non si applica in presenza di **discontinuità del materiale** (richiede le condizioni di raccordo e, fra queste, le condizioni al contorno);
  5. non utilizza le **grandezze globali** che hanno un diretto significato fisico (opera con funzioni del posto e del tempo che sono le loro densità);
  6. non consente l'applicazione diretta di **metodi numerici** (esige una preliminare discretizzazione);
  7. esclude la nozione di **tolleranza** che è tipica della fisica, dell'ingegneria, dell'analisi numerica e che utilizziamo nella vita di tutti i giorni;
  8. ignora l'associazione delle grandezze fisiche globali agli **elementi geometrici** dello spazio e agli elementi temporali (elimina ogni riferimento alla geometria);
  9. non mette in evidenza il ruolo essenziale della **dualità** dei complessi di celle che, peraltro, ignora.
-

è stato scritto così:

---

```
\begin{center} {\bf Svantaggi della formulazione differenziale}
\end{center}
\begin{enumerate}
\item \underline{impone} delle condizioni di {\bf
derivabilità} delle funzioni che non sono richieste dal
fenomeno fisico ( $\mathcal{R}$  soluzione debole; metodo di Galerkin);
\item \underline{non} si applica in presenza di {\bf sorgenti
concentrate} (nascono degli infiniti spaziali);
\item \underline{non} si applica a {\bf fenomeni impulsivi}
(nascono degli infiniti temporali);
\item \underline{non} si applica in presenza di {\bf
discontinuità del materiale} (richiede le condizioni di
raccordo e, fra queste, le condizioni al contorno);
\item \underline{non} utilizza le {\bf grandezze globali}
che hanno un diretto significato fisico (opera con funzioni
del posto e del tempo che sono le loro densità);
\item \underline{non} consente l'applicazione diretta di {\bf
metodi numerici} (esige una preliminare discretizzazione);
\item \underline{esclude} la nozione di {\bf tolleranza} che è
tipica della fisica, dell'ingegneria, dell'analisi numerica
e che utilizziamo nella vita di tutti i giorni;
\item \underline{ignora} l'associazione delle grandezze
fisiche globali agli {\bf elementi geometrici} dello spazio e
agli elementi temporali (elimina ogni riferimento alla
geometria);
\item \underline{non} mette in evidenza il ruolo essenziale
della {\bf dualità} dei complessi di celle che, peraltro,
ignora.
\end{enumerate}
```

---

I commenti, vale a dire le frasi che non devono apparire nel testo compilato, sono preceduti dal simbolo %, facendo attenzione che esso vale per una sola riga. Se quindi il commento si estende per diverse righe occorre far precedere ogni riga dal simbolo %.

Il testo che segue

---

```
% Il testo battuto fino a questo punto è stato controllato:  
% ricordarsi di correggere anche il capitolo 6. In diversi  
campi della fisica si constata che vi sono grandezze  
fisiche associate ai quattro elementi geometrici dello  
spazio,  
cioè i {\bf punti}, le {\bf linee}, le {\bf superfici}  
ed i {\bf volumi}.
```

---

produce il seguente risultato:

---

campi della fisica si constata che vi sono grandezze fisiche associate ai quattro elementi geometrici dello spazio, cioè i **punti**, le **linee**, le **superfici** ed i **volumi**.

---

Per ottenere il corsivo, il grassetto, ecc si usano le istruzioni seguenti

- il corsivo *attenzione* con `{\em attenzione}`
- il grassetto **Definizione** con `{\bf Definizione}`
- lo “slanted” *energia* con `{\sl energia}`
- l’italico *necessario* con `{\it necessario}`
- il “romanico” infinito con `{\rm infinito}`



Il testo seguente:

---

Si chiama **energia potenziale** di un sistema in una data configurazione, il lavoro che esso libera nel portarsi dalla configurazione *attuale* ad una configurazione di *ri-ferimento* scelta secondo convenienza.

---

è stato scritto così

---

Si chiama `{\bf energia potenziale}` di un sistema in una data configurazione, il lavoro che esso libera nel portarsi dalla configurazione `{\em attuale\}` ad una configurazione di `{\em riferimento\}` scelta secondo convenienza.

---

Il testo seguente:

---

*Definizione: si chiama **energia cinetica** di un sistema in moto, il lavoro che esso libera nel ridursi alla quiete.*

---

è stato scritto così

---

`{\sl Definizione:} {\em si chiama {\bf energia cinetica} di un sistema in moto, il lavoro che esso libera nel ridursi alla quiete. \}`

---

Il testo seguente (notare il rientro)

---

*Si chiama **energia** di un sistema fisico la capacità che ha il sistema di compiere lavoro e di fornire calore.*

---

è stato scritto così

---

```
\begin{quote} {\em Si chiama {\bf energia} di un sistema
fisico la capacità che ha il sistema di compiere lavoro e di
fornire calore}.
\end{quote}
```

---

Si noti che delimitando una sigla tra due dollari si ottiene lo stesso risultato dell'italico. La scrittura

---

L'energia cinetica  $T$  si può definire in modo analogo all'energia potenziale  $U$ .

---

è stato ottenuta così

---

```
L'energia cinetica  $T$  si può definire in
modo analogo all'energia potenziale {\it U}.
```

---

Per fare le note al piè di pagina si usa l'istruzione `{\footnote}` come nel testo seguente:

---

La nozione di **potenza**, definita come lavoro per unità di tempo, si riferisce al tasso di flusso d'energia<sup>3</sup>. Si parla infatti di potenza *assorbita* da una macchina, di potenza *erogata* da un generatore, di potenza *trasmessa* attraverso una superficie di potenza *emessa* da una superficie.

---

è stato ottenuta così

---

```
La nozione di {\bf
potenza},\index{potenza} definita come lavoro per unità di
tempo, si riferisce al tasso di flusso d'energia\footnote{Il
termine inglese corrispondente a {\em tasso\}/} è {\em
rate}.}. Si parla infatti di potenza {\em assorbita} da una
macchina, di potenza {\em erogata} da un generatore, di
potenza {\em trasmessa} attraverso una superficie di
potenza {\em emessa} da una superficie.
```

---

Per scrivere il comando "nuova pagina" si scrive `{\newpage}`.

---

<sup>3</sup>Il termine inglese corrispondente a *tasso* è *rate*.

## 0.2 Tabelle

Per fare una tabella di tre colonne con gli elementi incolonnati a sinistra (l) al centro (c), a destra (r) <sup>4</sup> quale, ad esempio:

---

<i>grandezza</i>	<i>associata a</i>	<i>tipo</i>
flusso	superficie	scalare
forza di volume	volume	vettoriale
tensione	linea	scalare

---

si deve scrivere:

---

```
\begin{tabular}{lcr} {\em grandezza\} & {\em  
associata a \}  
& {\em tipo\} & \\  
flusso & superficie & scalare & \\  
volume & volume & vettoriale & \\  
tensione & & & \\  
linea & scalare & & \\  
\end{tabular}
```

---

Notare che l'ultima riga non ha il segno di nuova riga `\\`. Non si possono lasciare righe vuote entro "tabular". Se si vuole saltare una riga occorre pensarla come una riga della tabella mettendo i separatori `&`.

---

<sup>4</sup>Lamport, p. 47

Per centrare la tabella si mette

---

<i>grandezza</i>	<i>associata a</i>	<i>tipo</i>
flusso	superficie	scalare
forza di volume	volume	vettoriale
tensione	linea	scalare

---

si deve scrivere:

---

```
\begin{center}
\begin{tabular}{lcr}
{\em grandezza\}/ & {\em associata a\}/ & {\em tipo\}/\\
flusso & superficie & scalare \\
forza di volume & volume & vettoriale \\
tensione & linea & scalare
\end{tabular}
\end{center}
```

---

Per ottenere la tabella centrata e riquadrata

---

<i>grandezza</i>	<i>associata a</i>	<i>tipo</i>
flusso	superficie	scalare
forza di volume	volume	vettoriale
tensione	linea	scalare

---

si deve scrivere:

---

```
\begin{center}
\begin{tabular}{|l|c|r|} \hline
{\em grandezza} & {\em associata a} & {\em tipo}\\ \hline
flusso & superficie & scalare \\
forza di volume & volume & vettoriale\\
tensione & linea & scalare \\ \hline
\end{tabular}
\end{center}
```

---

Per avere la didascalia di ogni tavola nonché la numerazione automatica in modo da poterla richiamare nel testo, conviene includere nel preambolo un archivio contenente una serie di nuovi comandi che ci semplificheranno la vita. Creeremo pertanto

un archivio che chiameremo **deposito.tex** che conterrà macroistruzioni. Tale archivio sarà incluso nel programma chiamandolo nel preambolo:

---

```
\documentstyle{report}
  \input{option_keys} % lettere accentate
  \input{deposito}    % non si mette l'estensione ". tex"
\begin{document}
  testo
\end{document}
```

---

Per costruire il deposito **deposito.tex** apriremo un nuovo documento e, senza mettere alcuna intestazione, scriveremo semplicemente

---

```
%=====
%          TAVOLA
%-----
% Inserisce una tavola alla quale passiamo 3 argomenti:
% il nome indicato con #1,
% la didascalia in alto indicata con #2
% e il contenuto indicato con #3.
% La numerazione sarà automatica
% ed il contenuto che sarà centrato nella pagina.
% Ecco il comando:

\newcommand{\TAVOLA}[3]  {
\begin{table}[htbp]
  \begin{center}
    \begin{minipage}{.8\textwidth}
      {\caption{\protect \small #2 [#1]}}
      \label{#1}
    \end{minipage}
    \vspace{2mm}{#3}
  \end{center}
\end{table}          }

% la sigla {htbp} indica che la tavola sarà posta nella pagina
% in una delle seguenti locazioni (deciderà il compilatore)
% h=here; t=top; b=bottom; p=pagina nuova.
% Il nome #1 è ripetuto in carattere piccolo nella didascalia
% affinché con tale nome possa essere richiamata la tavola
% nel testo.
%-----
```

---

Salveremo questo documento con il nome **deposito.tex** nello stesso direttorio in cui si trova l'archivio sul quale stiamo lavorando.

Vediamo ora come usare il comando TAVOLA appena definito. Vogliamo costruire una tabella con una intestazione su più colonne. Procediamo nel modo seguente: decidiamo un nome (o etichetta, inglese *label*) per identificare la tavola, ad esempio

“A78” e mettiamola come primo argomento; scriviamo la didascalia come secondo argomento e quindi mettiamo il contenuto della tavola come terzo argomento. Il risultato è:

Tabella 1: Questo è un esempio di tabella con intestazione su più colonne che, essendo dotata di etichetta, può essere richiamata dal testo. [A78]

nome		altro	
a	b	c	d
e	f	g	h

e per ottenerlo abbiamo battuto

---

```
\TAVOLA{A78}
{Questo è un esempio di tabella con intestazione su più
colonne che, essendo dotata di etichetta, può essere
richiamata dal testo.}
{
\begin{tabular}{|cc|cc|} \hline
\multicolumn{2}{|c|}{nome} &
\multicolumn{2}{c|}{altro}\\ \hline
a & b & c & d \\
e & f & g & h \\ \hline
\end{tabular}
}
```

---

Si noti che il comando `\multicolumn` contiene tre argomenti: il primo dice il numero di colonne che devono essere fuse, il secondo precisa il tipo di incolonnamento (`l=left`; `c=center`; `r=right`) e ha eventuali barre di divisione verticale, l'ultimo contiene la didascalia.

### 0.3 Formule

Le formule scritte su una riga separata e centrate si delimitano con `$$` Ad esempio per ottenere:

---

la quantità di moto di una particella di massa  $m$  è legata alla velocità  $\mathbf{v}$  dalla relazione

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

che deve essere riguardata come una relazione sperimentale dal momento che non vale in regime relativistico.

---

si deve scrivere

---

la quantità di moto di una particella di massa  $m$  è legata alla velocità  $\mathbf{v}$  dalla relazione  $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$  che deve essere riguardata come una relazione sperimentale dal momento che non vale in regime relativistico.

---

Si vede come le formule contenute nella riga di testo si scrivono delimitandole con il simbolo  $\$$ . Lo svantaggio di questa formula al centro è che non è numerata e quindi non si può far riferimento ad essa nel corso del testo. Per ottenere questo è consigliabile creare una nuova macroistruzione, che decideremo di chiamare  $\backslash EQ$  e che metteremo nel **deposito.tex**.



Richiameremo quindi in memoria **deposito.tex** e aggiungeremo il testo che segue:

---

```
%=====
%
%                      EQUAZIONE
%-----
% Equazione numerata  \EQ{formula #1}{etichetta #2}
\newcommand{\EQ} [2]
{
  \begin{equation}
    {\mbox{\tiny [#2]} % scrive in piccolo l'etichetta
    \hspace{5mm}       % lascia 5mm prima della formula
    #1                 % scrive la formula
    \label{#2}
  \end{equation}
}
%-----
```

---

Una volta salvato il nuovo **deposito.tex** potremo riscrivere il brano precedente così:

---

la quantità di moto di una particella di massa  $m$  è legata alla velocità  $\mathbf{v}$  dalla relazione

$${}^{[F34]} \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (1)$$

che deve essere riguardata come una relazione sperimentale dal momento che non vale in regime relativistico. La relazione 1 è solitamente considerata come definizione della quantità di moto, cosa non opportuna.

---

La scrittura presedente è stata ottenuta così:

---

la quantità di moto di una particella di massa  $m$  è legata alla velocità  $\mathbf{v}$  dalla relazione  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ <sup>F34</sup> che deve essere riguardata come una relazione sperimentale dal momento che non vale in regime relativistico. La relazione <sup>F34</sup> è solitamente considerata come definizione della quantità di moto, cosa non opportuna.

---

Per le lettere greche si veda <sup>5</sup>. Per fare lettere **greche** in grassetto si scrive `\BF \ph` essendo il comando `\BF` contenuto nel **deposito.tex**. Per lo stile calligrafico si scrive `\cal U`.

Così per ottenere

---

viscosità dinamica	$\eta$
spostamento iniziale	<b><math>\eta</math></b>
potenziale elettrico	$\phi$
potenziale delle velocità	$\varphi$
impulso della tensione elettrica	$\mathcal{U}$

---

si deve scrivere

---

```
\begin{center}
\begin{tabular}{ll}
viscosità dinamica & &  $\eta$  & \\
spostamento iniziale & &  $\eta$  & \\
potenziale elettrico & &  $\phi$  & \\
potenziale delle velocità & &  $\varphi$  & \\
impulso della tensione elettrica & &  $\mathcal{U}$  & \\
\end{tabular}
\end{center}
```

---

<sup>5</sup>Si veda Claudio Beccari, Latex, Hoepli, p.118.

## Un campionario di equazioni della fisica

Equazione di **Newton**  
*dinamica particella*

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(t)$$

Equazione di **Poisson**  
*il prezzemolo della fisica*

$$-\epsilon \Delta \varphi(t, \mathbf{r}) = \rho(t, \mathbf{r})$$

Equazione di d'**Alembert**  
*acustica*

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} \varphi(t, \mathbf{r}) - \Delta \varphi(t, \mathbf{r}) = 0$$

Equazione di **Fourier**  
*conduzione termica*

$$\rho c_v \partial_t T(t, \mathbf{r}) - K \Delta T(t, \mathbf{r}) = \sigma(t, \mathbf{r})$$

elettromagnetismo: equazioni di **Maxwell**

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + \partial_t \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \rho(t, \mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) - \partial_t \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \end{cases}$$

elastodinamica: equazione di **Navier**

$$\rho \partial_{tt} \boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{r}) - \left[ \mu \nabla^2 \boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{r}) + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{r})) \right] = \mathbf{f}(t, \mathbf{r})$$

fluidodinamica: equazioni di **Navier-Stokes**

$$\rho(t, \mathbf{r}) \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \nabla \left[ \frac{v^2(t, \mathbf{r})}{2} \right] + [\nabla \times \mathbf{v}(t, \mathbf{r})] \times \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \right\} - (\lambda + \mu) \nabla [\nabla \cdot \mathbf{v}(t, \mathbf{r})] - \mu \Delta \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{f}^{vol}(t, \mathbf{r})$$

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r})) = 0$$

**ovvero: derivate, derivate e ... ancora derivate!**

---

è stato scritto così:

---

```

\begin{center}
{\bf\Large \bf Un campionario di equazioni della fisica}
\end{center}
$$\begin{array}{lc}
\mbox{\begin{tabular}{l}
%-----
Equazione di {\bf Newton} \ \ {\em dinamica particella\}
\end{tabular}} & \DS m\frac{\diff^2}{\diff t^2} {\bf r}(t) = {\bf f}(t)\ \ [4mm]
%-----
\mbox{\begin{tabular}{l}
Equazione di {\bf Poisson} \ \ {\em il
prezzemolo della fisica\} \end{tabular}} & \DS -\epsilon
\Delta \varphi(t, {\bf r}) = \rho(t, {\bf r})\ \ [4mm]
%-----
\mbox{\begin{tabular}{l}
Equazione di d' {\bf Alembert} \ \ {\em
acustica\} \end{tabular}} & \DS \frac{1}{c^2} \partial_{tt}
\varphi(t, {\bf r}) - \Delta \varphi(t, {\bf r}) = 0\ \ [4mm]
%-----
\mbox{\begin{tabular}{l}
Equazione di {\bf Fourier} \ \ {\em
conduzione termica\} \end{tabular}} & \{\rho\} \ ; c_{\rm v} \ ;
\partial_t T(t, {\bf r}) - K \ ;
\Delta T(t, {\bf r}) = \sigma(t, {\bf r})\ \ [4mm]
%-----
\multicolumn{2}{c}{\mbox{elettromagnetismo: equazioni di
{\bf Maxwell}}}\ \ [4mm]
\left\{\begin{array}{l}
\nabla \cdot {\bf B}(t, {\bf r}) = 0 \ \ [2mm]
\nabla \times {\bf E}(t, {\bf r}) + \partial_t {\bf B}(t, {\bf r}) = 0
\end{array}\right. \&
\left\{\begin{array}{l}
\nabla \cdot {\bf D}(t, {\bf r}) = \rho(t, {\bf r}) \ \ [2mm]
\nabla \times {\bf H}(t, {\bf r}) - \partial_t {\bf D}(t, {\bf r}) = {\bf j}(t, {\bf r})
\end{array}\right. \ \ [8mm]
%-----
\multicolumn{2}{c}{\mbox{elastodinamica: equazione di
{\bf Navier}}}\ \ [2mm]
\multicolumn{2}{c}{\rho \partial_{tt} {\bf \eta}(t, {\bf r})
-\Big[\mu, \nabla^2 {\bf \eta}(t, {\bf r}) + (\lambda + \mu) \ , \nabla

```

```

(\Div\, {\BF \eta}(t, {\bf r}))\Big]={\bf f}(t, {\bf r}) }\\[4mm]
%-----
\multicolumn{2}{c}{\mbox{fluidodinamica: equazioni di
{\bf Navier-Stokes}} }\\[4mm]
\multicolumn{2}{c}{
\DS \rho(t, {\bf r})\left\{\frac{\partial {\bf v}(t, {\bf r})}{\partial t}+\nabla\left[\frac{v^2(t, {\bf r})}{2}\right]+\Big[\nabla
x{\bf v}(t, {\bf r})\Big]x {\bf v}(t, {\bf r})\right\}\hspace{2cm}} \\[4mm]
\multicolumn{2}{c}{\hspace{4cm}\DS -(\lambda+\mu)\nabla
\Big[\nabla\ps {\bf v}(t, {\bf r})\Big]-\mu\Delta {\bf v}(t, {\bf r})={\bf f}^{\text{vol}}(t, {\bf r})} \\[4mm]
\multicolumn{2}{c}{
\DS \frac{\partial {\rho}(t, {\bf r})}{\partial t}+\nabla\ps
(\rho(t, {\bf r}) \, , {\bf v}(t, {\bf r}))=0\hspace{65mm}} \\
\end{array}$$
\begin{center}{\bf ovvero: derivate, derivate e ...
ancora derivate!}\end{center}

```

---

La tavola sella pagina seguente è stata scritta così:

Tabella 2: Le principali equazioni costitutive [LL785]

1	Coulomb	$\frac{\Psi}{S} \stackrel{\text{law}}{=} \epsilon \frac{U}{L}$	$D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Psi}{S}$	$E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U}{L}$	$D \stackrel{\text{law}}{=} \epsilon E$
2	(magnetism)	$\frac{\Phi}{S} \stackrel{\text{law}}{=} \mu \frac{F}{L}$	$B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Phi}{S}$	$H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F}{L}$	$B \stackrel{\text{law}}{=} \mu H$
3	(dynamics)	$p \stackrel{\text{law}}{=} m \frac{\Delta x}{T}$		$v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta x}{T}$	$p \stackrel{\text{law}}{=} mv$
4	Hooke	$\frac{N}{S} \stackrel{\text{law}}{=} E \frac{\Delta l}{L}$	$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N}{S}$	$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta l}{L}$	$\sigma \stackrel{\text{law}}{=} E\epsilon$
5	(shear)	$\frac{T}{S} \stackrel{\text{law}}{=} G \frac{\Delta l}{h}$	$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T}{S}$	$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta l}{h}$	$\tau \stackrel{\text{law}}{=} E\gamma$
6	Ohm	$\frac{Q}{S} \stackrel{\text{law}}{=} -\sigma \frac{\Delta V}{L}$	$j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{S}$	$E \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\Delta V}{L}$	$j \stackrel{\text{law}}{=} \sigma E$
7	Fourier	$\frac{Q}{S} \stackrel{\text{law}}{=} -\lambda \frac{\Delta T}{L}$	$q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{S}$	$p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta T}{L}$	$q \stackrel{\text{law}}{=} -\lambda p$
8	Fick	$\frac{Q}{S} \stackrel{\text{law}}{=} -D \frac{\Delta c}{L}$	$q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{S}$	$j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta c}{L}$	$q \stackrel{\text{law}}{=} -Dj$
9	Newton	$\frac{T}{S} \stackrel{\text{law}}{=} -\mu \frac{\Delta v}{h}$	$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T}{S}$	$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta v}{h}$	$\tau \stackrel{\text{law}}{=} -\mu\gamma$
10	Darcy	$\frac{Q}{S} \stackrel{\text{law}}{=} -K \frac{\Delta H}{L}$	$q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{S}$	$j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta H}{L}$	$q \stackrel{\text{law}}{=} -Kj$

---

```

\TAVOLA{LL785}{Le principali equazioni costitutive}{
$$\begin{array}{|c|l|l|l|l|l|l|}
\hline &&&&\ [-3mm]
%-----
1&\mbox{Coulomb } &\DS
\frac{\mit\Psi}{S} \ \law \ \epsilon\,
\frac{U}{L} &\DS \ D \ \Def\, \ \frac{\mit\Psi}{S} &\DS \ E \ \Def
\frac{U}{L} &\DS \ D

```

```

\law \epsilon E\ [3mm]
\hline &&&&\ [-3mm]
%-----
2&\mbox{(magnetism) } &\DS \,
\frac{\mit\Phi}{S} \law \mu\, \frac{F}{L} &\DS B
\Def\, \frac{\mit\Phi}{S} &\DS H \Def\, \frac{F}{L} &\DS B
\law
\mu\,H\ [3mm]\hline &&&&\ [-3mm]
%-----
3&\mbox{(dynamics)} &\DS \ ;p \law m\,
\frac{\Delta x}{T} &\DS &\DS v \Def\, \frac{\Delta x}{T}
&\DS p
\law m v\ [3mm]\hline &&&&\ [-3mm]
%-----
4&\mbox{Hooke} &\DS \, \frac{N}{S} \law E\,
\frac{\Delta l}{L} &\DS
\sigma \Def
\frac{N}{S} &\DS \epsilon \Def\, \frac{\Delta l}{L} &\DS
\sigma \law E \epsilon\ [3mm]\hline &&&&\ [-3mm]
%-----
5&\mbox{(shear)} &\DS \, \frac{T}{S} \law
G\, \frac{\Delta l}{h} &\DS
\tau \Def
\frac{T}{S} &\DS \gamma \Def\, \frac{\Delta l}{h} &\DS \tau
\law E \gamma\ [3mm]\hline
&&&&\ [-4mm]\hline
&&&&\ [-3mm]
%-----
6&\mbox{Ohm} &\DS \, \frac{Q}{S} \law
-\sigma\, \frac{\Delta V}{L} &\DS j \Def\, \frac{Q}{S} &\DS E
\Def -\frac{\Delta V}{L} &\DS j \law \sigma E \ [3mm] \hline
&&&&\ [-3mm]
%-----
7&\mbox{Fourier} &\DS \, \frac{Q}{S} \law -
\lambda\, \frac{\Delta T}{L} &\DS q \Def\, \frac{Q}{S} &\DS
p \Def
\frac{\Delta T}{L} &\DS q \law - \lambda p\ [3mm]
\hline &&&&\ [-3mm]
%-----
8&\mbox{Fick} &\DS \, \frac{Q}{S} \law -
D\, \frac{\Delta c}{L} &\DS q \Def
\frac{Q}{S} &\DS j \Def\, \frac{\Delta c}{L} &\DS q \law - D

```

```

j\\ [3mm]
\hline &&&&&\ [-3mm]
%-----
9&\mbox{Newton} &\DS \, \frac{T}{S} \law -\mu\, \frac{\Delta
v}{h} &\DS \tau \Def\, \frac{T}{S} &\DS \gamma \Def\,
\frac{\Delta v}{h} &\DS
\tau \law -\mu \gamma\\ [3mm]
\hline &&&&&\ [-3mm]
%-----
10&\mbox{Darcy} &\DS \, \frac{Q}{S} \law -
K\, \frac{\Delta H}{L} &\DS q \Def
\frac{Q}{S} &\DS j \Def\, \frac{\Delta H}{L} &\DS q \law - K
j\\ [3mm] \hline
\end{array}$$$

```

---

## 0.4 Array

Quando si vuole fare una tabella contenente espressioni matematiche (indici, potenze, ecc) il comando *tabular* obbliga a scrivere le espressioni entro i dollari . Per evitare troppi dollari è stato istituito il comando **array** che è simile a *tabular* ma consente di mettere espressioni senza delimitarle con i dollari.

Esempio: il quadro di formule

---


$$\begin{array}{ccc}
 u_x & u_y & u_z \\
 v_x & v_y & v_z \\
 w_x & w_y & w_z
 \end{array}$$


---

è stato ottenuto con i comandi

```

$$
\begin{array}{ccc}
u_x & & u_y & & u_z \\
v_x & & v_y & & v_z \\
w_x & & w_y & & w_z
\end{array}
$$

```

---

Per ottenere lo stesso risultato con il comando *tabular* si sarebbe dovuto scrivere

---



```

$$
\begin{tabular}{ccc}
u_x & & u_y & & u_z \\
v_x & & v_y & & v_z \\
w_x & & w_y & & w_z
\end{tabular}
$$

```

---

Il comando array consente anche di racchiudere le righe entro parentesi come indica l'esempio seguente

---

$$\begin{array}{ccc|ccc||ccc}
 u_x & u_y & u_z & u_x & u_y & u_z & u_x & u_y & u_z \\
 v_x & v_y & v_z & v_x & v_y & v_z & v_x & v_y & v_z \\
 w_x & w_y & w_z & w_x & w_y & w_z & w_x & w_y & w_z
 \end{array}$$


---

Questo è stato ottenuto così

---

```

$$
\left[
\begin{array}{ccc}
u_x & & u_y & & u_z \\
v_x & & v_y & & v_z \\
w_x & & w_y & & w_z
\end{array}
\right]
\hspace{20pt}
\left|
\begin{array}{ccc}
u_x & & u_y & & u_z \\
v_x & & v_y & & v_z \\
w_x & & w_y & & w_z
\end{array}
\right|
\hspace{20pt}
\left\|
\begin{array}{ccc}
u_x & & u_y & & u_z \\
v_x & & v_y & & v_z \\
w_x & & w_y & & w_z
\end{array}
\right\|
$$

```

\right\|  
\$\$

---

Se si desidera racchiudere diverse righe di formule con una parentesi graffa

---

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{cases}$$

---

si deve scrivere

---

```
$$
\left\{
\begin{array}{l}

\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+
\cos(\alpha)\sin(\beta)\backslash\backslash
\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)
-\sin(\alpha)\sin(\beta)\backslash\backslash
\end{array}
\right.
$
```

---

Usando l'*array* le formule sono senza il dollaro ma le scritte devono essere contenute entro `mbox{}`. Il testo seguente:

---

**Le equazioni fondamentali della fisica sono composte da:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{equazioni “di struttura”} \\ \text{equazioni } \mathbf{costitutive} \text{ o materiali.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{equazioni di bilancio;} \\ \text{equazioni circuitali;} \\ \text{formazione incrementi spaziali e temporali;} \end{array} \right.$$

---

è stato scritto così:

---

```
\begin{center}
{\bf Le equazioni fondamentali della fisica sono composte da:}
\end{center}
$\left\{
\begin{tabular}{l}
equazioni “{\bf di struttura}”
$\left\{
\begin{tabular}{ll}
equazioni di bilancio;\
equazioni circuitali;\
formazione incrementi spaziali e temporali; \
\end{tabular}
\right.$ \[8mm]
equazioni {\bf costitutive} o materiali.
\end{tabular}
\right.$
```

---

## 0.5 Integrali e somme

Per ottenere

---

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \qquad \sum_0^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

---

occorre scrivere

---

```
$$  
\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}  
  \hspace{2cm}  
\sum_0^{\infty} \frac{1}{2^k}=2  
$$
```

---

Si può migliorare la scrittura usando il  $d$  del simbolo di differenziale in carattere “roman” e distanziare due simboli interponendo il comando `\`, che dà una spaziatura piccola oppure `\;`; dà una spaziatura maggiore

---

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2} \qquad \sum_0^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

---

occorre scrivere

---

```
$$  
\int_0^1 x \, \{\rm d\}x = \frac{1}{2}  
  \hspace{2cm}  
\sum_0^{\infty}\; \frac{1}{2^k}=2  
$$
```

---

A questo punto è opportuno arricchire l'archivio **deposito.tex** inserendo

i seguenti nuovi comandi

---

```
\newcommand {\ps} {\,\{\bf \cdot\}} % prodotto scalare
\newcommand {\x} {\!\ \times \!} % prodotto vettoriale
\newcommand {\Def} {\stackrel{\rm def}{=}} %
definizione
\newcommand {\law} {\stackrel{\rm law}{=}} % legge
\newcommand {\diff }{\mbox{\,\,\rm\mathstrut d}}
\newcommand {\Div} {\mbox{\rm div\,}} %divergenza
\newcommand {\Rot} {\mbox{\rm rot\,}} %rotore
\newcommand {\Grad} {\mbox{\rm grad\,}} % gradiente
\newcommand {\ov}[1]{\overline{#1}} % soprallineatura
\newcommand {\Ra} {\rightarrow} % freccia destra
\newcommand {\Le} {\leftarrow} % freccia sinistra
\newcommand {\Dw} {\downarrow} % freccia giù
\newcommand {\Up} {\uparrow} % freccia sù
\newcommand {\hs} {\hspace{1cm}} % spazio orizz. di 1
cm
\newcommand {\Lim}[1]{\lim_{#1 \to \, , 0}} % limite
\newcommand {\DS} {\displaystyle} % spazia formule
array
\newcommand {\real} {\rm I\!R} % insieme dei numeri reali
\newcommand {\euc} {\rm I\!E} % spazio euclideo
% il comando seguente è per il grassetto lettere greche
\newcommand {\BF}[1] {\mbox{\boldmath $#1$}}
```

---

Questo ci consente di scrivere

---

Le grandezze che abbiamo citato sono grandezze **globali**: esse non sono densità lineari o superficiali o di volume di altre grandezze. Solitamente queste grandezze sono espresse come integrali:

$${}_{[D15]} \quad T = \int_L \mathbf{t} \cdot d\mathbf{L} \quad F = \int_D \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} \quad Q = \int_V q \, dV \quad (2)$$

Si osservi che dal punto di vista sperimentale le grandezze globali sono, in generale, quelle che si misurano direttamente. Le grandezze densitarie che si ottengono da quelle globali sono, in generale, funzioni del posto ed eventualmente anche della direzione.

Le equazioni (2) sono comunemente usate per esprimere le grandezze globali in termini delle rispettive densità.

---

usando le seguenti istruzioni

---

Le grandezze che abbiamo citato sono grandezze `\bf globali`: esse non sono densità lineari o superficiali o di volume di altre grandezze. Solitamente queste grandezze sono espresse come integrali:

`\EQ{T=\int_{L} {\bf t} \ps \diff {\bf L} \hspace{30pt}}`

`F=\int_{D} {\bf f} \ps \diff {\bf S} \hspace{30pt}`

`Q=\int_{V} q \ ; \diff V}{D15}` Si osservi che dal punto di vista sperimentale le grandezze globali sono, in generale, quelle che si misurano direttamente. Le grandezze densitarie che si ottengono da quelle globali sono, in generale, funzioni del posto ed eventualmente anche della direzione.

Le equazioni (`\ref{D15}`) sono comunemente usate per esprimere le grandezze globali in termini delle rispettive densità

---

Con i nuovi comandi si potrà ottenere

---

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \rightarrow \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{u} \\ \nabla \times \mathbf{w} = 0 & \rightarrow \mathbf{w} = \nabla f \end{cases}$$

---

scrivendo

---

```

\left\{
\begin{array}{lcl}
\operatorname{Div} \{\mathbf{v}\} = 0 & \&\operatorname{Ra} & & \{\mathbf{v}\} = \operatorname{Rot} \{\mathbf{u}\} \\
\operatorname{Rot} \{\mathbf{w}\} = 0 & \&\operatorname{Ra} & & \{\mathbf{w}\} = \operatorname{Grad} f
\end{array}
\right.

```

---

Per ottenere questo risultato

---

$a_1 = \frac{y_2 - y_3}{\Delta}$	$a_2 = \frac{y_3 - y_1}{\Delta}$	$a_3 = \frac{y_1 - y_2}{\Delta}$
$b_1 = \frac{x_3 - x_2}{\Delta}$	$b_2 = \frac{x_1 - x_3}{\Delta}$	$b_3 = \frac{x_2 - x_1}{\Delta}$

---

si deve scrivere

---

```

\begin{center}
\framebox{
$\begin{array}{ccc}
\operatorname{DS} a_1 = \frac{y_2 - y_3}{\Delta} \hspace{1cm}
& \operatorname{DS} a_2 = \frac{y_3 - y_1}{\Delta} \hspace{1cm}
& \operatorname{DS} a_3 = \frac{y_1 - y_2}{\Delta} \hspace{1cm} \\
\operatorname{DS} b_1 = \frac{x_3 - x_2}{\Delta} \hspace{1cm}
& \operatorname{DS} b_2 = \frac{x_1 - x_3}{\Delta} \hspace{1cm}
& \operatorname{DS} b_3 = \frac{x_2 - x_1}{\Delta} \hspace{1cm}
\end{array}$
}
\end{center}

```

---



---

$$[S632] \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

---

si scrive

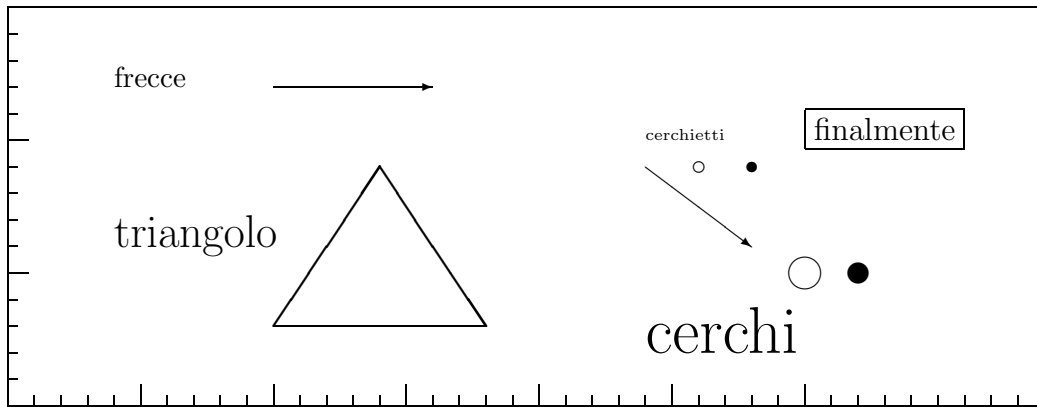
---

```
\EQ{
\left[
\begin{array}{c}
u_1 \\
u_2 \\
u_3
\end{array}
\right] =
\left[
\begin{array}{ccc}
0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0
\end{array}
\right]
\begin{array}{c}
a_1 \\
a_2 \\
a_3
\end{array}
}{S632}
```

---

## 0.6 Disegni fatti con LaTeX

Con il Tex si possono fare disegni (modesti) come



con le seguenti istruzioni

```

\begin{center}
\begin{picture}(390,140)
% riquadro
\put(0,0){\line(1,0){390}}
\put(0,150){\line(1,0){390}}
\put(0,0){\line(0,1){150}}
\put(390,0){\line(0,1){150}}
% linee
\put(100,30){\line(2,3){40}}
\put(140,90){\line(2,-3){40}}
\put(100,30){\line(1,0){80}}
% vettori
\put(240,90){\vector(4,-3){40}}
\put(100,120){\vector(1,0){60}}
% tratteggi
\multiput(0,0)(0,10){15}{\line(1,0){4}}
\multiput(0,0)(0,50){3}{\line(1,0){8}}
\multiput(0,0)(10,0){43}{\line(0,1){4}}
\multiput(0,0)(50,0){9}{\line(0,1){8}}
% cerchi
\put(260,90){\circle{4}}
\put(280,90){\circle*{4}}
\put(300,50){\circle{12}}
\put(320,50){\circle*{8}}
% scritte
\put(240,100){\tiny cerchietti}
\put(40,120){\small frecce}
\put(40,60){\Large triangolo}
\put(240,20){\Huge cerchi}

```

```
\put(350,50){\fbox{finalmente}}  
\end{picture}  
\end{center}
```

---

## 0.7 Inserire figure

A questo punto è opportuno aggiungere al `deposito.tex` il testo seguente:

---

```
%=====
%          \figura{nome}{scala}{didascalia}
%=====
% FIGURA  IN ENCAPSULATED POSTSCRIPT FILE
% Inserisce e centra una figura EPSF
% numerata di dimensione letta nel file poscript
% di nome e label #1 e didascalia #3 di scala #2 (in millesimi)
% La larghezza della didascalia ? settata nel prembolo
% tramite la larghezza \Zcapt
%-----
\input epsf.def
\newlength\Zcapt \Zcapt .9\textwidth      %Caption width
\def\figurename{\small Figure}
\def\ENVFIG#1{\begin{figure}[#1]}
%-----
\newcommand{\figura}[3]
{
\epsfscale=#2
  \ENVFIG{htbp}%posizione h=qui; t=top; b=bottom; p=pagina nuova btp
  \begin{center}
    \mbox{\epsfbox{#1.eps}} % to insert a vbox for a figure
%-----
    \begin{minipage}{\Zcapt}          %<=larghezza didascalia pari a \Zcapt
      \ifthenelse{\value{mostra}=1}{\caption{\protect \small#3  [#1]}}
      {\caption{\protect \small#3}}
      \label{#1}
    \end{minipage}
%-----
    \end{center}
  \end{figure}
}
%-----
```

---

Questo darà la possibilità di inserire nel documento che si sta lavorando un disegno che sia stato precedentemente fatto (con Mac Draw, Cricket Draw, Corel Draw, Adobe Illustrator, ecc.) e che sia stato copiato (con taglia e incolla) entro la finestra picture associata all'archivio che si sta lavorando. Abbiamo prodotto con Mac Draw un disegno che chiamiamo "buco": il seguente comando

---

```
\figura{buco}{1000}{L'orientazione esterna di un solido  
quando è propagata ad una cavità punta verso l'interno,  
cioè verso il buco.}
```

---

fa apparire la figura.

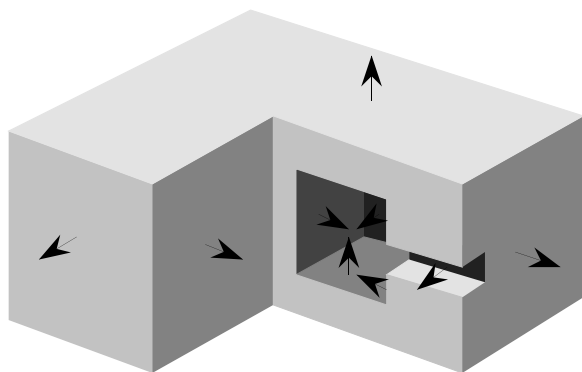


Figura 1: L'orientazione esterna di un solido quando è propagata ad una cavità punta verso l'interno, cioè verso il buco. [buco]

## 0.8 Indice analitico

Per fare l'indice analitico della tesi si deve inserire all'inizio, dopo il titolo, il comando `\tableofcontents`.

## 0.9 Bibliografia

Per avere il risultato della pagina seguente occorre scrivere

---

```
\begin{thebibliography} {99}
\bibitem {Becc} C. Beccari, Latex, Hoepli, 1981;
\bibitem {Knuth} D. Knuth, The Art of Computer Programming,
Addison-Wesley, 1981, (seconda edizione);
\bibitem {Lamp} L.Lamport, Latex, A document preparation system,
User's guide and reference manual, Addison-Wesley, 1986.
\end{thebibliography}
```

---

Per citare un libro occorre fare una abbreviazione o una sigla del nome dell'autore e quindi richiamarlo con il comando `\cite{nome}`. Se si vuole citare sia il libro che la pagina ove si trova un argomento si scrive:

`\cite[p.117]{Becc}`. Ad esempio il testo:

---

Per imparare l'uso del Tex consigliamo il libro di Beccari [1]. Il modo di scrivere le formule è spiegato in [1, p.117].

---

è prodotto da:

---

Per imparare l'uso del Tex consigliamo il libro di Beccari~\cite{Becc}. Il modo di scrivere le formule è spiegato in~\cite[p.117]{Becc}.

---

# Bibliografia

- [1] C. Beccari, Latex, Hoepli, 1981;
- [2] D. Knuth, The Art of Computer Programming, Addison-Wesley, 1981, (seconda edizione);
- [3] L.Lamport, Latex, A document preparation system, User's guide and reference manual, Addison-Wesley, 1986.

## 0.10 Titolo

Per avere il titolo di questa dispensa abbiamo inserito nel preambolo

---

```
\title{\bf Il LaTeX\ mediante esempi}
\author{Enzo TONTI}
\thanks{Dipartimento di Ingegneria Civile
        Piazzale Europa 1, 34127 Trieste, Italia.
        e-mail: tonti@univ.trieste.it}}
```

---

e quindi, subito dopo il `\begin{document}` abbiamo inserito il comando `\maketitle`.

## 0.11 ESEMPIO: Formulazione variazionale

Consideriamo due spazi vettoriali  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  siano essi spazi finito dimensionali o spazi funzionali. Introduciamo una forma bilineare  $B(v, u)$  che soddisfi le seguenti proprietà:

- sia lineare su  $\mathcal{U}$  e su  $\mathcal{V}$  (dove il nome);
- sia *non degenera*, vale a dire se esiste un  $u_0$  tale che  $B(u_0, v) = 0$  per ogni  $v \in \mathcal{V}$  deve essere necessariamente  $u_0 = \emptyset_{\mathcal{U}}$ ;
- sia a valori reali anche se gli spazi  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  fossero complessi.

Indicheremo la forma bilineare con  $\langle v, u \rangle$ , cioè porremo  $\langle v, u \rangle = B(v, u)$ <sup>6</sup>. Essa può definirsi come una applicazione lineare di  $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$  in  $\mathbb{R}$  e può chiamarsi **prodotto scalare** in quanto costituisce la generalizzazione naturale del prodotto scalare di due vettori dello spazio tridimensionale.

Con l'introduzione di una forma bilineare non degenera i due spazi  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  si dicono *posti in dualità*.

### 0.11.1 Le condizioni per la formulazione variazionale

Indichiamo con  $u$  ed  $f$  un elemento di  $\mathcal{U}$  ed di  $\mathcal{V}$  rispettivamente. Indichiamo con  $S : \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{U} \mapsto \mathcal{C}(S) \subset \mathcal{V}$  un operatore lineare, sia esso una matrice, un operatore differenziale, un operatore integrale, ecc.

Consideriamo il problema<sup>7</sup>

$$[S100] \quad Su = f \tag{4}$$

Supponiamo che la soluzione esista: deve essere  $f \in \mathcal{C}(S)$ . Supponiamo che la soluzione sia unica: indicando con  $\mathcal{N}$  la varietà nulla di  $S$  deve essere  $\mathcal{N}(S) = \emptyset$ <sup>8</sup>.

---

<sup>6</sup>Si osservi che lavorando con due spazi distinti l'ordine degli argomenti non può essere invertito. Noi metteremo l'elemento dello spazio  $\mathcal{V}$  per primo per conservare la forma del prodotto scalare della fisica forza  $\times$  spostamento nella forma  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$  essendo l'equazione di moto  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}$ .

<sup>7</sup>Parliamo di *problema* e non di *equazione* per intendere che, nel caso si tratti di equazioni differenziali, siano incluse le condizioni addizionali, quali le condizioni iniziali, al contorno, la classe funzionale, ecc. Solo nel caso di equazioni algebriche il termine *problema* è equivalente al termine *sistema* o semplicemente *equazione*.

<sup>8</sup>Questa limitazione non è necessaria: la mettiamo perchè quasi sempre si verifica.



Ci proponiamo di vedere quando la soluzione del problema (4) possa concepirsi come l'elemento che rende minimo un funzionale  $F[u]$ . A questo scopo osserviamo che se indichiamo con  $r(x)$  il **residuo** della equazione, cioè poniamo

$$_{[G966]} \quad r(x) \stackrel{\text{def}}{=} Su(x) - f(x) \quad (5)$$

si ha la seguente equivalenza:

$$_{[G982]} \quad r = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle r, \delta u \rangle = 0. \quad (6)$$

Eseguiamo il prodotto scalare:

$$_{[S105]} \quad \langle Su - f, \delta u \rangle = 0. \quad (7)$$

Se  $S$  è **simmetrico**:

$$_{[S110]} \quad \langle Su', u'' \rangle = \langle Su'', u' \rangle \quad (8)$$

allora

$$_{[S120]} \quad \langle Su - f, \delta u \rangle = \delta \left[ \frac{1}{2} \langle Su, u \rangle - \langle f, u \rangle \right]. \quad (9)$$

Posto

$$_{[S125]} \quad F[u] = \frac{1}{2} \langle Su, u \rangle - \langle f, u \rangle \quad (10)$$

l'equazione (7) diviene

$$_{[S127]} \quad \delta F[u] = 0 \Rightarrow F[u] \text{ è } \mathbf{stazionario}. \quad (11)$$

Se in più  $S$  è **definito positivo**, cioè

$$_{[S130]} \quad \langle Su', u' \rangle > 0 \quad (12)$$

risulta

$$_{[S140]} \quad \delta^2 F[u] = \delta[\langle Su, \delta u \rangle - \langle f, \delta u \rangle] = \langle S\delta u, \delta u \rangle > 0 \Rightarrow F[u] \text{ è } \mathbf{minimo}. \quad (13)$$

In conclusione *per avere una formulazione variazionale occorre che l'operatore sia simmetrico*<sup>9</sup>; *per avere in più il minimo del funzionale occorre che l'operatore sia definito positivo.*

---

<sup>9</sup>Un operatore  $A$  è **autoaggiunto** quando coincide con il suo aggiunto, cioè  $A = A^*$ . Un operatore autoaggiunto è simmetrico mentre un operatore simmetrico per essere autoaggiunto deve avere il dominio chiuso. Se  $S$  indica un operatore simmetrico si ha la relazione  $S \subseteq S^*$ . In pratica la distinzione è significativa solo per gli operatori differenziali.

### 0.11.2 La ricerca del nucleo $h(x, s)$ .

Presentiamo un modo per trovare un nucleo  $h(\mathbf{x}, \mathbf{s})$  che dia luogo ad un operatore integrale  $H$  simmetrico e definito positivo. Quanto alla condizione che il suo dominio sia sufficientemente largo da contenere il codominio di  $L$  nessuna preoccupazione: un operatore integrale ha uno stomaco buono e digerisce qualunque funzione di  $\mathcal{L}^2$ .

Limitiamoci al caso  $\Omega = [0, 1]$ . Consideriamo una funzione analitica che ammette uno sviluppo in serie di Taylor a coefficienti positivi e che sia uniformemente convergente. Tale è la funzione

$$[S256] \quad h(x, s) = \exp(xs) \quad (14)$$

Se  $v \in L^2[0, 1]$  si ha

$$\begin{aligned} \langle v, Hv \rangle &= \int_0^1 v(x) \left\{ \int_0^1 \exp(xs) v(s) \, ds \right\} dx \\ [S345] \quad &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (xs)^k v(s) v(x) \, dx \, ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \int_0^1 x^k v(x) \, dx \right] \left[ \int_0^1 s^k v(s) \, ds \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (p_k)^2 > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Osserviamo che la sola funzione  $v \in \mathcal{L}^2[0, 1]$  che ha tutti i  $p_k$  nulli è la funzione identicamente nulla. Ne viene che l'operatore  $H$  così definito è un operatore simmetrico, definito positivo e perciò invertibile.

Risulta così che l'operatore  $K$  soddisfa tutte le condizioni richieste per avere la formulazione variazionale estesa.

**Esempio 2.** Dare una formulazione variazionale estesa con minimo al problema ai valori iniziali

$$[S307] \quad \frac{du(x)}{dx} = f(x); \quad x \in [0, 1]; \quad u(0) = 0; \quad u \in \mathcal{C}^1[0, 1] \quad (16)$$

Essendo

$$[S309] \quad L = \left\{ \frac{d}{dx}; \quad u(0) = 0; \quad u \in \mathcal{C}^1[0, 1] \right\} \quad (17)$$

Il suo aggiunto si ottiene dalla relazione

$$[S319] \quad \int_0^1 \frac{du(x)}{dx} \bar{u}(x) \, dx = [u(x)\bar{u}(x)]_0^x + \int_0^1 u(x) \left[ -\frac{d\bar{u}(x)}{dx} \right] dx \quad (18)$$

ed è

$$[S396] \quad L^* = \left\{ -\frac{d}{dx}; \quad u(1) = 0; \quad u \in \mathcal{AC}[0, 1] \right\} \quad (19)$$

essendo  $\mathcal{A}$  l'insieme delle funzioni assolutamente continue. il problema (16) non ammette formulazioni variazionali in senso classico in quanto l'operatore non è simmetrico.

Consideriamo ad esempio il nucleo

$$[S348] \quad k(x, s) = \exp(xs)(1-x)(1-s) \quad (20)$$

e, con esso, la trasformata integrale

$$[S230] \quad K = \int_0^1 k(x, s) \dots ds. \quad (21)$$

Poiché  $k(1, s) = 0$  si realizza la condizione  $\mathcal{D}(L^*) \supset \mathcal{C}(K)$  e quindi si può considerare il problema equivalente a (16)

$$[S250] \quad - \frac{d}{dx} \int_0^1 k(x, s) \left[ \frac{du(s)}{ds} - f(s) \right] ds = 0 \quad k(1, s) = 0 \quad u(x) \in \mathcal{C}^1[0, 1]. \quad (22)$$

che soddisfa la condizione al contorno  $k(1, s) = 0$ , il funzionale è

$$[S349] \quad E[u] = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{du(x)}{dx} - f(x) \right] k(x, s) \left[ \frac{du(s)}{ds} - f(s) \right] ds dx. \quad (23)$$

Esso è stazionario e minimo in corrispondenza alla soluzione del problema (16) Il problema di Cauchy<sup>10</sup> è così stato ricondotto ad un problema variazionale in senso esteso. Il metodo è stato applicato con successo dal punto di vista numerico. Rimarchiamo il fatto che i problemi ai valori iniziali erano finora senza una formulazione variazionale con minimo.

Si noti che la presenza di una doppia integrazione è dovuta al fatto che vi è una trasformata integrale. L'integrale interno è quello della trasformata mentre quello esterno è del prodotto scalare. Per meglio evidenziare il ruolo di questi due integrali si può scrivere il funzionale così:

$$[S271] \quad F[u] = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \frac{du(x)}{dx} - f(x) \right] \left\{ \int_0^1 g(x, s) \left[ \frac{du(s)}{ds} - f(s) \right] ds \right\} dx \quad (24)$$

### 0.11.3 Eliminazione delle derivate

La formulazione variazionale estesa consente, nel caso di operatori lineari<sup>11</sup>, la eliminazione delle derivate nel funzionale, cosa non possibile nella formulazione classica

<sup>10</sup>A dire il vero il problema di Cauchy è più generale:  $u'(x)=f(x,u(x))$  con  $u(0)=$ assegnato. Ma il risultato vale anche per questo tipo di problema nonlineare.

<sup>11</sup>Anche nel caso di operatori non lineari che contengano le derivate in modo lineare, ad esempio  $u' = f(x, u(x))$  oppure  $a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u^n(x)$ .

(quando esiste). Questa possibilità è dovuta alla presenza del nucleo  $k(x, s)$  che consente di assorbire le derivate per integrazione per parti.

Rifacendoci all'esempio precedente, osserviamo che il funzionale può scriversi

$$\begin{aligned} E[u] &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{du(x)}{dx} \left\{ \int_0^1 k(x, s) \frac{du(s)}{ds} ds \right\} dx \\ &\quad - \int_0^1 \frac{du(x)}{dx} \left\{ \int_0^1 k(x, s) f(s) ds \right\} dx + \text{const.} \end{aligned} \quad (25)$$

Limitiamoci dapprima al solo primo termine: eseguendo una prima integrazione per parti in  $x$  si ottiene

$$\begin{aligned} E_1[u] &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{du(x)}{dx} \left[ k(x, s) u(s) \right]_{s=0}^{s=1} dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{du(x)}{dx} \left\{ \int_0^1 \frac{\partial k(x, s)}{\partial s} u(s) ds \right\} dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Osserviamo che il primo integrale si annulla in quanto la condizione iniziale è  $u(0) = 0$  e per la condizione imposta è  $k(1, s) = 0$ . Questo ci spinge ad effettuare una seconda integrazione per parti in  $x$  ottenendo

$$\begin{aligned} E_1[u] &= -\frac{1}{2} \left[ u(x) \int_0^1 \frac{\partial k(x, s)}{\partial s} u(s) ds \right]_{x=0}^{x=1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 u(x) \left\{ \int_0^1 \frac{\partial^2 k(x, s)}{\partial x \partial s} u(s) ds \right\} dx \end{aligned} \quad (27)$$

Nel termine al contorno si annulla il pezzo con  $s = 0$  essendo  $u(0) = 0$ . Anche il pezzo per  $s = 1$  si annulla: infatti

$$k(1, s) = 0 \quad \forall s \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial k(1, s)}{\partial s} = 0. \quad (28)$$

Rimane

$$E_1[u] = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 u(x) \frac{\partial^2 k(x, s)}{\partial x \partial s} u(s) ds dx. \quad (29)$$

Operando analogo trasformazione sul secondo termine della (25), con una sola integrazione per parti, si perviene a

$$E_2[u] = \int_0^1 \int_0^1 u(x) \frac{\partial k(x, s)}{\partial x} f(s) ds dx \quad (30)$$

Raccogliendo i due pezzi  $E_1[u]$  ed  $E_2[u]$  si ottiene

$$E[u] = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 u(x) \frac{\partial^2 k(x, s)}{\partial x \partial s} u(s) ds dx + \int_0^1 \int_0^1 u(x) \frac{\partial k(x, s)}{\partial x} f(s) ds dx. \quad (31)$$

Con queste trasformazioni il funzionale è completamente esente da derivate.

È notevole che si possa ottenere una formulazione variazionale estesa con un funzionale contenente solo la funzione e non le sue derivate. Se si tiene presente che nell'analisi numerica si ricorre spesso all'integrazione per parti per abbassare l'ordine delle derivate, ad esempio nel metodo di Galerkin usato negli elementi finiti, si vede che è possibile eliminarle del tutto con vantaggio per la scelta delle funzioni di forma.

Rimane anche da indagare la semplificazione che questo fatto apporta dal punto di vista della dimostrazione dell'esistenza della soluzione.

La cosa interessante è che questo procedimento si può applicare anche a problemi che già ammettono una formulazione variazionale classica. Si tratta di dare loro una formulazione variazionale estesa utilizzando un nucleo opportuno che sia in grado di assorbire le derivate parziali in  $x$  e  $s$ . Ad esempio il problema

$$[S564] \quad -\frac{d^2}{dx^2}u(x) = f(x); \quad x \in [0, 1]; \quad u(0) = 0; \quad u(1) = 0; \quad u \in \mathcal{C}^2[0, 1] \quad (32)$$

ammette formulazione variazionale estesa con il funzionale

$$[S565] \quad E[u] = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 u(x) \frac{\partial^4 k(x, s)}{\partial x^2 \partial s^2} u(s) ds dx + \int_0^1 \int_0^1 u(x) \frac{\partial^2 k(x, s)}{\partial x \partial s} f(s) ds dx \quad (33)$$

pur di prendere un nucleo  $k(x, s)$  che provveda ad annullare i termini al contorno

$$[S674] \quad \begin{cases} \left[ k(x, s) \frac{du(x)}{dx} - \frac{\partial}{\partial x} k(x, s) u(x) \right]_{x=0}^{x=1} = 0 \\ \left[ \frac{\partial^2 k(x, s)}{\partial s^2} \frac{du(x)}{dx} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 k(x, s)}{\partial s^2} u(x) \right]_{x=0}^{x=1} = 0 \end{cases} \quad (34)$$

Si osservi che se

$$[S680] \quad k(0, s) = k(1, s) = 0 \quad (35)$$

per ogni  $s$  automaticamente

$$[S688] \quad \frac{\partial^2 k(0, s)}{\partial s^2} = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 k(1, s)}{\partial s^2} = 0 \quad (36)$$

Quindi la sola condizione (35) consente l'eliminazione dei termini al contorno (34) che non sono annullati dalla  $u(x)$ .

---

Il testo delle pagine precedenti è stato ottenuto così:

---

```
% =====
  \section{ESEMPIO: Formulazione variazionale}
% =====
  Consideriamo due spazi
vettoriali  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  siano essi spazi finito
dimensionali o spazi funzionali. Introduciamo una forma
bilineare  $B(v,u)$  che soddisfi le seguenti proprietà:
\begin{itemize}
  \item sia lineare su  $\mathcal{U}$  e su  $\mathcal{V}$  (dove il
nome);
  \item sia non degenerata, vale a dire se esiste un  $u_0$ 
tale che  $B(u_0,v)=0$  per ogni  $v \in \mathcal{V}$  deve essere
necessariamente  $u_0 = \emptyset_{\mathcal{U}}$ ;
  \item sia a valori reali anche se gli spazi  $\mathcal{U}$  e
 $\mathcal{V}$  fossero complessi.
\end{itemize}

Indicheremo la forma bilineare con  $\langle v,u \rangle$ , cioè
porremo  $\langle v,u \rangle = B(v,u)$ 
\footnote{Si osservi che lavorando con due spazi distinti
l'ordine degli argomenti non può essere invertito. Noi
metteremo l'elemento dello spazio  $\mathcal{V}$  per primo per
conservare la forma del prodotto scalare della fisica forza
 $\mathbf{f}$  spostamento nella forma  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{r}$ 
essendo l'equazione di moto
 $\mathbf{m} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}$ .} . Essa può definirsi come una
applicazione lineare di  $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$  in  $\mathbb{R}$  e
può chiamarsi prodotto scalare in quanto costituisce la
generalizzazione naturale del prodotto scalare di due vettori
dello spazio tridimensionale.

Con l'introduzione di una forma bilineare non degenera i due
spazi  $\mathcal{U}$  e
 $\mathcal{V}$  si dicono posti in dualità.
%-----
\subsection{Le condizioni per la formulazione variazionale}
%-----
  Indichiamo con  $u$  ed  $f$  un elemento di  $\mathcal{U}$  ed di
 $\mathcal{V}$  rispettivamente. Indichiamo con  $S: \mathcal{C}
D(S) \subset \mathcal{U} \xrightarrow{\text{mapsto}} \mathcal{C}(S) \subset \mathcal{V}$  un
```

operatore lineare, sia esso una matrice, un operatore differenziale, un operatore integrale, ecc.

Consideriamo il problema `\footnote{Parliamo di {\em problema\}}` e non di `{\em equazione\}` per intendere che, nel caso si tratti di equazioni differenziali, siano incluse le condizioni addizionali, quali le condizioni iniziali, al contorno, la classe funzionale, ecc. Solo nel caso di equazioni algebriche il termine `{\em problema\}` è equivalente al termine `{\em sistema\}` o semplicemente `{\em equazione\}`.

`\EQ{Su=f}{S100}` Supponiamo che la soluzione esista: deve essere  $f \in \mathcal{C}(S)$ . Supponiamo che la soluzione sia unica: indicando con  $\mathcal{N}$  la varietà nulla di  $S$  deve essere  $\mathcal{N}(S) = \emptyset$  `\footnote{Questa limitazione non è necessaria: la mettiamo perchè quasi sempre si verifica.}`.

Ci proponiamo di vedere quando la soluzione del problema (`\ref{S100}`) possa concepirsi come l'elemento che rende minimo un funzionale  $F[u]$ .

A questo scopo osserviamo che se indichiamo con  $r(x)$  il `{\bf residuo}` della equazione, cioè poniamo `\EQ{r(x)\Def Su(x)-f(x)}{G966}` si ha la seguente equivalenza:

$$\begin{aligned} & \EQ{r=0} \\ & \hspace{5mm} \longrightarrow \hspace{5mm} \\ & \langle r, \delta u \rangle \\ & = 0. \end{aligned} \quad \text{\code{G982}}$$

Eseguiamo il prodotto scalare:

`\EQ{\langle Su-f, \delta u \rangle = 0.}{S105}` Se  $S$  è `{\bf simmetrico}`:

$$\EQ{\langle Su', u' \rangle = \langle Su'', u' \rangle} \quad \text{\code{S110}}$$

allora `\EQ{\langle Su-f, \delta u \rangle = \delta \left[ \frac{1}{2} \langle Su, u \rangle - \langle f, u \rangle \right]}` `{S120}` Posto

$$\EQ{F[u] = \frac{1}{2} \langle Su, u \rangle - \langle f, u \rangle}$$

l'equazione (`\ref{S105}`) diviene

`\EQ{\delta F[u]=0 \longrightarrow \boxed{F[u] \text{ è } {\bf stazionario}}}` `{S127}` Se in più  $S$  è `{\bf definito}`

positivo}, cioè  
 $\langle Su', u' \rangle > 0$  risulta  
 $\Delta^2 F[u] = \Delta \langle Su, \Delta u \rangle - \langle f, \Delta u \rangle = \langle S \Delta u, \Delta u \rangle > 0$   
 In conclusione (per avere una formulazione variazionale occorre che l'operatore sia simmetrico

Un operatore  $A$  è **autoaggiunto** quando coincide con il suo aggiunto, cioè  $A = A^*$ . Un operatore autoaggiunto è simmetrico mentre un operatore simmetrico per essere autoaggiunto deve avere il dominio chiuso. Se  $S$  indica un operatore simmetrico si ha la relazione  $S \subseteq S^*$ . In pratica la distinzione è significativa solo per gli operatori differenziali.; per avere in più il minimo del funzionale occorre che l'operatore sia definito positivo. \/\}

-----  
 \subsection{La ricerca del nucleo  $h(x, s)$ .}

Presentiamo un modo per trovare un nucleo  $h(x, s)$  che dia luogo ad un operatore integrale  $H$  simmetrico e definito positivo. Quanto alla condizione che il suo dominio sia sufficientemente largo da contenere il codominio di  $L$  nessuna preoccupazione: un operatore integrale ha uno stomaco buono e digerisce qualunque funzione di  $L^2$ .

Limitiamoci al caso  $\Omega = [0, 1]$ . Consideriamo una funzione analitica che ammette uno sviluppo in serie di Taylor a coefficienti positivi e che sia uniformemente convergente.

Tale è la funzione  
 $h(x, s) = \exp(xs)$   
 Se  $v \in L^2[0, 1]$  si ha  

$$\langle v, H v \rangle = \int_0^1 v(x) \left( \int_0^1 \exp(xs) v(s) ds \right) dx = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (xs)^k v(s)v(x) ds dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k v(x) \left( \int_0^1 s^k v(s) ds \right) dx$$



$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (p_k)^2 > 0$$

Osserviamo che la sola funzione  $v \in \mathcal{L}^2[0,1]$  che ha tutti i  $p_k$  nulli è la funzione identicamente nulla. Ne viene che l'operatore  $H$  così definito è un operatore simmetrico, definito positivo e perciò invertibile.

Risulta così che l'operatore  $K$  soddisfa tutte le condizioni richieste per avere la formulazione variazionale estesa.

**Esempio 2.** Dare una formulazione variazionale estesa con minimo al problema ai valori iniziali
 
$$\begin{cases} \frac{du(x)}{dx} = f(x); \\ x \in [0, 1]; \\ u(0) = 0; \\ u \in \mathcal{C}^1[0,1] \end{cases}$$

Essendo
 
$$L = \int_0^1 \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx; \quad u(0) = 0; \quad u \in \mathcal{C}^1[0,1]$$
 Il suo aggiunto si ottiene dalla relazione

$$\int_0^1 \frac{du(x)}{dx} \bar{u}(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \right) u(x) dx + \int_0^1 u(x) \left( -\frac{d\bar{u}(x)}{dx} \right) dx$$

ed è
 
$$L^* = \int_0^1 \left( -\frac{d}{dx} \right) \bar{u}(x) dx; \quad u(1) = 0; \quad u \in \mathcal{AC}[0,1]$$
 essendo  $\mathcal{AC}$  l'insieme delle funzioni assolutamente continue. Il problema (\ref{S307}) non ammette formulazioni variazionali in senso classico in quanto l'operatore non è simmetrico.

Consideriamo ad esempio il nucleo
 
$$k(x,s) = \exp(xs) (1-x)(1-s)$$
 e, con esso, la trasformata integrale
 
$$K = \int_0^1 k(x,s) \dots ds$$
 Poiché  $k(1,s) = 0$  si realizza la condizione  $\mathcal{D}(L^*) \supset \mathcal{C}(K)$  e quindi si può considerare il problema equivalente a (\ref{S307})
 
$$-\frac{du(x)}{dx} - \int_0^1 k(x,s) \left( \frac{du(s)}{ds} - f(s) \right) ds = 0; \quad k(1,s) = 0; \quad u(x) \in \mathcal{C}^1[0,1].$$

che soddisfa la condizione al contorno  $k(1,s)=0$ , il funzionale è

$$E[u]=\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{du(x)}{dx} - f(x) \right] k(x,s) \left[ \frac{du(s)}{ds} - f(s) \right] ds dx \quad \{S349\}$$

Esso è stazionario e minimo in corrispondenza alla soluzione del problema (\ref{S307})

Il problema di Cauchy

\footnote{A dire il vero il problema di Cauchy è più generale:  $u'(x)=f(x,u(x))$  con  $u(0)=$ assegnato. Ma il risultato vale anche per questo tipo di problema nonlineare.} è così stato ricondotto ad un problema variazionale in senso esteso. Il metodo è stato applicato con successo dal punto di vista numerico. Rimarchiamo il fatto che i problemi ai valori iniziali erano finora senza una formulazione variazionale con minimo.

Si noti che la presenza di una doppia integrazione è dovuta al fatto che vi è una trasformata integrale. L'integrale interno è quello della trasformata mentre quello esterno è del prodotto scalare. Per meglio evidenziare il ruolo di questi due integrali si può scrivere il funzionale così:

$$E[u]= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \frac{du(x)}{dx} - f(x) \right] \left\{ \int_0^1 g(x,s) \left[ \frac{du(s)}{ds} - f(s) \right] ds \right\} dx \quad \{S271\}$$

%-----  
\subsection{Eliminazione delle derivate}

%-----

La formulazione variazionale estesa consente, nel caso di operatori lineari\footnote{Anche nel caso di operatori non lineari che contengano le derivate in modo lineare, ad esempio  $u'=f(x,u(x))$  oppure  $a(x)u''(x)+b(x)u'(x)+c(x)u^n(x)$ .}, la eliminazione delle derivate nel funzionale, cosa non possibile nella formulazione classica (quando esiste). Questa possibilità è dovuta alla presenza del nucleo  $k(x,s)$  che consente di assorbire le derivate per integrazione per parti.

Rifacendoci all'esempio precedente, osserviamo che il funzionale può scriversi

$$\begin{aligned} E[u] &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} \left( \int_0^1 k(x,s) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \frac{\partial u(s)}{\partial s} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \frac{\partial u(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x)}{\partial x} \int_0^1 k(x,s) \, f(s) \, ds \right) dx + \text{const.} \end{aligned}$$

Limitiamoci dapprima al solo primo termine: eseguendo una prima integrazione per parti in  $x$  si ottiene

$$\begin{aligned} E_1[u] &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} \left( \int_0^1 k(x,s) u(s) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \frac{\partial u(x)}{\partial x} \int_0^1 \frac{\partial k(x,s)}{\partial s} u(s) \, ds \right) dx. \end{aligned}$$

Osserviamo che il primo integrale si annulla in quanto la condizione iniziale è  $u(0)=0$  e per la condizione imposta è  $k(1,s)=0$ . Questo ci spinge ad effettuare una seconda integrazione per parti in  $x$  ottenendo

$$\begin{aligned} E_1[u] &= \int_0^1 \left[ u(x) \int_0^1 \frac{\partial k(x,s)}{\partial s} u(s) \, ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 u(x) \int_0^1 \frac{\partial^2 k(x,s)}{\partial x \partial s} u(s) \, ds \right] dx \end{aligned}$$

Nel termine al contorno si annulla il pezzo con  $s=0$  essendo  $u(0)=0$ . Anche il pezzo per  $s=1$  si annulla: infatti

$$\int_0^1 k(1,s) \frac{\partial u(1)}{\partial s} ds = 0 \quad \forall s \quad \Rightarrow \int_0^1 \frac{\partial k(1,s)}{\partial s} u(s) ds = 0. \quad \{S884\}$$

Rimane

$$E_1[u] = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial^2 k(x,s)}{\partial x \partial s} u(x) u(s) \, ds \, dx$$

$u(s)$   $\frac{\partial}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}$ .

Operando analoga trasformazione sul secondo termine della (\ref{S358}), con una sola integrazione per parti, si perviene a

$$E_2[u] = \int_0^1 \int_0^1 u(x) \frac{\partial}{\partial x} k(x,s) \frac{\partial}{\partial s} f(s) \frac{\partial}{\partial x} ds dx,$$

Raccogliendo i due pezzi  $E_1[u]$  ed  $E_2[u]$  si ottiene

$$E[u] = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 u(x) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} k(x,s) \frac{\partial}{\partial x} f(s) \frac{\partial}{\partial x} ds dx$$

$u(s)$   $\frac{\partial}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 u(x) \frac{\partial}{\partial x} k(x,s) \frac{\partial}{\partial s} f(s) \frac{\partial}{\partial x} ds dx,$$

Con queste trasformazioni il funzionale è completamente esente da derivate.

E' notevole che si possa ottenere una formulazione variazionale estesa con un funzionale contenente solo la funzione e non le sue derivate. Se si tiene presente che nell'analisi numerica si ricorre spesso all'integrazione per parti per abbassare l'ordine delle derivate, ad esempio nel metodo di Galerkin usato negli elementi finiti, si vede che è possibile eliminarle del tutto con vantaggio per la scelta delle funzioni di forma.

Rimane anche da indagare la semplificazione che questo fatto apporta dal punto di vista della dimostrazione dell'esistenza della soluzione.

La cosa interessante è che questo procedimento si può applicare anche a problemi che già ammettono una formulazione variazionale classica. Si tratta di dare loro una formulazione variazionale estesa utilizzando un nucleo opportuno che sia in grado di assorbire le derivate parziali

in  $x$  e  $s$ . Ad esempio il problema

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) = f(x); \quad u \in C^2[0,1]; \quad u(0) = 0; \quad u(1) = 0;$$

ammette formulazione variazionale estesa con il funzionale

$$E[u] = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 u(x) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial s^2} k(x,s) \frac{\partial}{\partial x} f(s) \frac{\partial}{\partial x} ds dx$$

$$u(x) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial s^2} k(x,s) \frac{\partial}{\partial x} f(s) \frac{\partial}{\partial x} ds dx$$

$$u(x) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial s^2} k(x,s) \frac{\partial}{\partial x} f(s) \frac{\partial}{\partial x} ds dx$$

$u(s)$   $\frac{\partial}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 u(x) \frac{\partial^2 k(x,s)}{\partial x \partial s} f(s) ds dx,$$
 \diff x}{S565} pur di prendere un nucleo  $k(x,s)$  che provveda ad annullare i termini al contorno

$$\left[ \begin{array}{c} \int_0^1 k(x,s) \frac{du(x)}{dx} - \frac{\partial k(x,s)}{\partial x} u(x) \Big|_{x=0}^{x=1} = 0 \\ \int_0^1 \frac{\partial^2 k(x,s)}{\partial s^2} \frac{du(x)}{dx} - \frac{\partial k(x,s)}{\partial x} \frac{\partial^2 k(x,s)}{\partial s^2} u(x) \Big|_{x=0}^{x=1} = 0 \end{array} \right] \quad (S674)$$

Si osservi che se

$$k(0, s) = k(1, s) = 0 \quad (S680)$$

per ogni  $s$  automaticamente

$$\frac{\partial^2 k(0, s)}{\partial s^2} = 0; \quad e \quad \frac{\partial^2 k(1, s)}{\partial s^2} = 0 \quad (S688)$$

Quindi la sola condizione (S680) consente l'eliminazione dei termini al contorno (S674) che non sono annullati dalla  $u(x)$ .

FINE